

Ідентифікація параметрів структури ґрунтових криволінійних масивів числовими методами квазіконформних відображень

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2021.35>

Андрій Ярославович Бомба
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики
Національний університет водного господарства та природокористування
Рівне, Україна
a.ya.bomba@nuwm.edu.ua

Михайло Володимирович Бойчура
Науково-дослідна частина
Національний університет водного господарства та природокористування
Рівне, Україна
m.v.boichura@nuwm.edu.ua

Ольга Романівна Мічута
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики
Національний університет водного господарства та природокористування
Рівне, Україна
o.r.michuta@nuwm.edu.ua

Анотація — Методику реконструкції зображень із застосуванням, зокрема, числових методів комплексного аналізу адаптовано на випадки ідентифікації параметрів структури ґрунтових криволінійних масивів. Основна ідея розробленого підходу полягає у розв'язанні відповідної модельної задачі числовими методами квазіконформних відображень для порівняно нескладної області і конформному відображенні результатів на складній конструкції досліджуване фізичне середовище. Суттєвою перевагою (у порівнянні з існуючими) такого підходу є можливість реконструкції зображення без накладання гіпотези щодо довільності форм ліній рівних потенціалів на великих відстанях від електродів. Більше того, забезпечується врахування розподілу густини струму на останніх (зокрема, «відкидається» традиційне припущення щодо «точковості» ділянок прикладання потенціалів)

Ключові слова — електрична томографія; квазіконформні відображення; ідентифікація; обернені задачі; числові методи.

I. ВСТУП

У галузі електричної томографії при реконструкції зображення фрагментів ґрунтових масивів, як правило, застосовують спрощення, згідно якого відповідна область вважається скінченною [1]. Досліджуване середовище, при цьому, обмежується лінією горизонту та деякою глибинною лінією, побудованою наближено, виходячи з пропущення щодо відсутності руху зарядів на віддалених ділянках. Ще одним поширеним спрощенням є припущення щодо «точковості» ділянок контакту електродів з поверхнею ґрунтового масиву. Все це, очевидно, негативно впливає на точність розв'язків.

Нами ж розроблено підхід, який дозволяє уникати наведених спрощень. Для цього, в першу чергу, реконструкцію зображення фрагменту

ґрунтового криволінійного масиву запропоновано здійснювати не у досліджуваному фізичному середовищі (рис. 1, а), а у значно простішій за конструкцією області (рис. 1, б), отриманій шляхом конформного відображення:

$$z = \frac{\tilde{z} + i\kappa}{\tilde{z} - i\kappa} \quad (z = x + iy, \quad \tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}, \quad \kappa = \text{const}). \quad (1)$$

Тут $x = \tilde{g}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \kappa^2) / (\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - \kappa)^2)$, $y = \tilde{g}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2\kappa\tilde{x} / (\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - \kappa)^2)$. Врахування ж розподілів густин струму, які мають місце вздовж ділянок прикладання квазіпотенціалів, здійснюється за допомогою функцій течії. Інструментарієм для їх використання обрано числовий метод квазіконформних відображень (для побудови полів густин струму), який, окрім згаданого, володіє низкою інших переваг [2].

II. ЗАДАЧА РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕННЯ

Задачу електричної томографії розв'язуємо в однозв'язній криволінійній області $\partial G_z = \{(x, y) : x = \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)), \quad y = \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)), \quad \tau \in R\}$ (рис. 1, б), отриманій шляхом конформного відображення (1), де $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ – визначені неперервно диференційовані функції, які задають границю ∂G_z (рис. 1, а). Дана задача при шуканих функціях $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$ (потенціалів) та $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$ (течій) для кожної (p -ї) із \tilde{p} ($1 \leq p \leq \tilde{p}$) інжекцій за умови ідентифікації коефіцієнта провідності $\sigma = \sigma(x, y)$ записується у вигляді [1]:

$$\sigma \varphi_x^{(p)} = \psi_y^{(p)}, \quad \sigma \varphi_y^{(p)} = -\psi_x^{(p)}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(p)}|_{A_p B_p} &= \varphi_*^{(p)}, \varphi^{(p)}|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)} (\varphi^{*(p)} - \varphi_*^{(p)} > 0), \\ \psi^{(p)}|_{A_p D_p} &= 0, \psi^{(p)}|_{B_p N} = \psi^{(p)}|_{K C_p} = Q^{(p)}; \\ \varphi^{(p)}(M)|_{B_p N} &= \bar{\varphi}^{(p)}(M), \varphi^{(p)}(M)|_{K C_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(M), \\ \varphi^{(p)}(M)|_{A_p D_p} &= \underline{\varphi}^{(p)}(M), \psi^{(p)}(M)|_{A_p B_p} = \psi_*^{(p)}(M), \\ \psi^{(p)}(M)|_{C_p D_p} &= \psi^{*(p)}(M), \end{aligned} \quad (3)$$

де K та N – точки, координати яких визначаються з певних апріорних міркувань [3]; $Q^{(p)}$ – потоки; A_p, B_p, C_p, D_p – вибрані точки на границі; M – біжуча точка відповідної кривої; $B_p C_p$ та $A_p D_p$ – непроникні граничні лінії течій; $A_p B_p$ та $C_p D_p$ – вибрані еквіпотенціальні лінії. Коефіцієнт провідності, наприклад, може шукатись у вигляді функції локальних сплесків однорідностей [1, 4].

Реконструкцію зображення в G_z здійснюємо за умови почергового ітераційного розв'язання задач на мінімізацію функціонала, наведеного в [4] (при шуканому σ) за даними

$$\begin{aligned} x^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_1), \tilde{y}(\tau_1)), \\ y^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_1), \tilde{y}(\tau_1)), \psi \in [0, Q^{(p)}], \\ x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_2), \tilde{y}(\tau_2)), \\ y^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_2), \tilde{y}(\tau_2)), \psi \in [0, Q^{(p)}], \\ x^{(p)}(\varphi, 0) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_3), \tilde{y}(\tau_3)), \\ y^{(p)}(\varphi, 0) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_3), \tilde{y}(\tau_3)), \varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}], \\ x^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_4), \tilde{y}(\tau_4)), \\ y^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_4), \tilde{y}(\tau_4)), \end{aligned} \quad (5)$$

та на побудову полів густин струму (при невідомих комплексно спряжених функціях $x^{(p)} = x^{(p)}(\varphi, \psi)$, $y^{(p)} = y^{(p)}(\varphi, \psi)$) із застосуванням узагальнень рівнянь Лапласа та умов ортогональності, наведених в [2] і крайових умов:

$$\begin{aligned} x(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_{AB}^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_{AB}^{(p)}(\psi))), \\ y(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_{AB}^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_{AB}^{(p)}(\psi))), \\ x(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_{CD}^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_{CD}^{(p)}(\psi))), \\ y(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_{CD}^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_{CD}^{(p)}(\psi))), \\ x(\varphi, 0) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_{AD}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\tau_{AD}^{(p)}(\varphi))), \\ y(\varphi, 0) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_{AD}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\tau_{AD}^{(p)}(\varphi))), \\ x(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_{BC}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\tau_{BC}^{(p)}(\varphi))), \\ y(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_{BC}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\tau_{BC}^{(p)}(\varphi))), \end{aligned} \quad (6)$$

де $\tau = \tau_{AB}^{(p)}(\psi)$, $\tau = \tau_{CD}^{(p)}(\psi)$, $\tau = \tau_{AD}^{(p)}(\varphi)$, $\tau = \tau_{BC}^{(p)}(\varphi)$ – розрахункові залежності параметрів задання граничних вузлів від значень функцій потенціалу та течії на ділянках $A_p B_p$, $C_p D_p$, $A_p D_p$, $B_p C_p$,

відповідно; $\tau_1 = \tau_*^{(p)}(\psi)$, $\tau_2 = \tau^{*(p)}(\psi)$, $\tau_3 = \underline{\tau}^{(p)}(\varphi)$, $\tau_4 = \bar{\tau}^{(p)}(\varphi)$; $\tau = \tau_*^{(p)}(\psi)$, $\tau = \bar{\tau}^{(p)}(\varphi)$, $\tau = \tau^{*(p)}(\psi)$, $\tau = \underline{\tau}^{(p)}(\varphi)$ – функції, побудовані шляхом інтерполювання апріорно відомих даних про функції потенціалу та течії на ∂G_z [1]; $\varphi_N^{(p)}$ та $\varphi_K^{(p)}$ – квазіпотенціали у точках N та K на p -й інжекції.

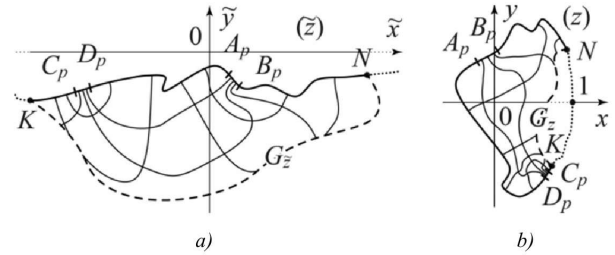


Рисунок 1. Схематичне зображення досліджуваної фізичної області G_z (a) та відповідного їй скінченного аналога G_z (b)

У загальному випадку, описана задача розв'язується наближено, із застосуванням різницьких схем. Відповідний алгоритм є аналогічним до [1, 4]. Отриманий у результаті розрахунків розподіл коефіцієнта провідності конформно відображається на область G_z .

III. ВИСНОВКИ

У роботі здійснено синтез алгоритмів [1] та [4] реконструкції зображень. Утворений відповідним чином підхід дозволяє досліджувати структуру приповерхневих шарів масштабного за розміром ґрунтового масиву в порівняно простій за конструкцією області. Здійснюється це, з одного боку, із застосуванням аналітичного конформного відображення за допомогою дробово-раціональної функції пів-площини на досить малу за розмірами фігуру, з іншого – шляхом почергового ітераційного застосування квазіконформних відображень прямокутників на криволінійну фігуру і мінімізації функціоналу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] A. Bomba, M. Boichura and B. Sydorochuk, "Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems," Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2020. Vol. 5 (4), pp. 45–54.
- [2] Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу. Рівне : НУВГП, 2013. 430 с.
- [3] M. H. Loke, "Tutorial: 2-D and 3-D electrical imaging surveys." [Online]. URL: <https://www.geotomosoft.com/coursenotes.zip>. [Accessed: September 10, 2021].
- [4] A. Bomba and M. Boichura, "Identification of burst parameters using numerical quasiconformal mapping methods". International Journal of Applied Mathematics, 2020. Vol. 33 (5), pp. 903–917.