

Процеси перенесення в шарі за лінійної регресійної моделі на нижній границі

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2023.049>

Ольга Чернуха

Відділ числових методів математичної фізики
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАНУ
Кафедра обчислювальної математики і
програмування
Національний університет “Львівська політехніка”,
м. Львів, Україна
zaliznuchna6@gmail.com

Юрій Білушак

Відділ числових методів математичної фізики
Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ
Кафедра обчислювальної математики і
програмування
Національний університет “Львівська політехніка”,
м. Львів, Україна
byixx13@gmail.com

Галина Білушак

Кафедра обчислювальної математики і програмування
Національний університет “Львівська політехніка”,
м. Львів, Україна
halyna.i.bilushchak@lpnu.ua

Анотація—Зроблена постановка та розв’язана крайова задача процесів перенесення в шарі за експериментальних даних щодо шуканої функції на нижній границі. Отримано рівняння лінійної регресії та надійні інтервали для його коефіцієнтів. Знайдено розв’язок поставленої задачі та межі надійного інтервалу для шуканої функції.

Ключові слова—крайова задача; гранична умова; лінійна регресія; надійний інтервал.

I. ВСТУП

Подальший розвиток підходів і методів математичного опису нерівноважних процесів різної фізичної природи в природних або штучних об’єктах спричинений необхідністю побудови ефективних методик і оцінок для прогнозування перерозподілу забруднень техногенного походження в об’єктах природного середовища, оцінці якості питної води та покращення її очистки в промислових масштабах, встановленні впливу дифузії агресивних речовин при оцінці надійності та довговічності експлуатації елементів і вузлів макроконструкцій для запобігання руйнування відповідних матеріалів, тощо. Такі дослідження дозволяють отримувати достовірний прогноз процесів, які протікають в об’єктах навколишнього середовища, та вчасно вживати необхідні заходи для запобігання їх негативного розвитку.

Проте, не завжди можливо коректно накласти крайові умови на границі, виходячи з фізичних міркувань, навіть в достатньо загальному вигляді. Це спричинено складністю та недостатністю проведення відповідних досліджень, і тому відсутній аналіз та необхідні узагальнення.

У даній роботі розглядається крайова задача параболічного типу, що описує процеси

перенесення тепла, маси, заряду, тощо, в шарі, коли на одній з границь наявні експериментальні дані щодо шуканої функції.

II. ПОСТАНОВКА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНЕСЕННЯ ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ НА ГРАНИЦІ

Нехай процес перенесення в шарі товщини x_0 описується таким диференціальним рівнянням [5]

$$\rho \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де ρ , d – сталі коефіцієнти, t – час, x – просторова координата.

Вважаємо, що початкова умова є нульовою

$$f(t, x)|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Для $t > 0$ на верхній поверхні шару діє стале джерело маси:

$$f(t, x)|_{x=0} = f_* \equiv const. \quad (3)$$

На нижній границі шару відомі експериментальні дані в N моментах часу

TABLE I.

t	t_1	t_2	...	t_i	...	t_N
$f(t) _{x_0}$	$f_{x_0}(t_1)$	$f_{x_0}(t_2)$...	$f_{x_0}(t_i)$...	$f_{x_0}(t_N)$

Якщо за цими експериментальними даними побудувати лінійну регресійну модель [1, 7]

$$F(t) = at + b, \quad (4)$$

де коефіцієнти a і b знайдені методом найменших квадратів [6]

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N t_i f_{x_{0i}} - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right) \left(\sum_{i=1}^N f_{x_{0i}} \right)}{N \left(\sum_{i=1}^N t_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2}, \quad (5)$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^N t_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N f_{x_{0i}} \right) - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right) \left(\sum_{i=1}^N t_i f_{x_{0i}} \right)}{N \left(\sum_{i=1}^N t_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2}. \quad (6)$$

Тут $f_{x_{0i}} = f_{x_0}(t_i)$. Тоді гранична умова при $x = x_0$ набуде вигляду

$$f(t, x)|_{x=x_0} = F(t). \quad (7)$$

Якщо розглянемо випадок $N \rightarrow \infty$, то отримуємо такі асимптотичні співвідношення:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} t_i f_{x_{0i}}}{\sum_{i=1}^{\infty} t_i^2},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b = 0. \quad (8)$$

Зазначимо наступне: якщо змінюється кількість експериментальних вимірювань на тому самому часовому проміжку, то змінюються значення коефіцієнтів лінійної регресії a та b . Тобто, співставляючи (5), (6) і (8), можемо зробити висновок, що чим більший обсяг вибірки N , тим ближче кут нахилу регресійної прямої a наближається до виразу (8) і тим меншими є абсолютні значення вільного члену b .

III. ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ПЕРЕНЕСЕННЯ ЗА ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ НА ГРАНИЦІ

Крайову задачу зводимо до нульових граничних умов заміною

$$w(t, x) = f(t, x) - f_* \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) - F(t) \frac{x}{x_0}. \quad (9)$$

Тоді отримуємо наступну задачу:

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t)}{\partial t} \frac{x}{x_0} = D \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2} \quad (10)$$

з початковою умовою

$$w(t, x)|_{t=0} = -f_* \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) - F(t)|_{t=0} \frac{x}{x_0} \quad (11)$$

та нульовими граничними умовами

$$w(t, x)|_{x=0} = w(t, x)|_{x=x_0} = 0. \quad (12)$$

Тут $D = d/\rho$.

Застосуємо до крайової задачі (10)-(12) скінченне інтегральне сіп-перетворення Фур'є [3] ($x \rightarrow y_n = n\pi/x_0$, $w(t, x) \rightarrow \tilde{w}(t, y_n)$). Тоді в зображеннях отримуємо

$$\frac{d\tilde{w}(t, y_n)}{dt} + Dy_n^2 \tilde{w}(t, y_n) = \frac{dF(t)}{dt} \frac{(-1)^n}{y_n}, \quad (13)$$

$$\tilde{w}(t, x)|_{t=0} = \frac{-1}{y_n} \left(f_* + (-1)^{n+1} F(t) \right) \quad (14)$$

Розв'язком задачі (13), (14) є наступни вираз:

$$\tilde{w}(t, y_n) = -\frac{(-1)^n}{y_n} F(t) - e^{-Dy_n^2 t} \left[\frac{f_*}{y_n} - 2 \frac{(-1)^n}{y_n} F(t) \Big|_{t=0} + (-1)^n Dy_n \int F(t) e^{Dy_n^2 t} dt \Big|_{t=0} - \frac{(-1)^n}{y_n} Dy_n^2 \int F(t) e^{Dy_n^2 t} dt \right]. \quad (15)$$

Після застосування до співвідношення (15) оберненого перетворення Фур'є з використанням (9), одержимо [4]

$$f(t, x) = f_* \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) + F(t) \frac{x}{x_0} - \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{y_n} F(t) + e^{-Dy_n^2 t} \left[\frac{f_*}{y_n} - 2 \frac{(-1)^n}{y_n} F(t) \Big|_{t=0} + (-1)^n Dy_n \int F(t) e^{Dy_n^2 t} dt \Big|_{t=0} - \frac{(-1)^n}{y_n} Dy_n^2 \int F(t) e^{Dy_n^2 t} dt \right] \right] \sin(y_n x). \quad (16)$$

Якщо врахуємо, що $F(t)$ є лінійною регресією, тобто справедлива формула (4), тоді (16) можна сконкретизувати таким чином

$$(-1)^n y_n e^{-Dy_n^2 t} \int F(t) e^{Dy_n^2 t} dt = \frac{(-1)^n}{Dy_n} \left[at + b - \frac{a}{Dy_n^2} \right],$$

$$(-1)^n y_n e^{-Dy_n^2 t} \int F(t) e^{Dy_n^2 t} dt \Big|_{t=0} = \frac{(-1)^n}{Dy_n} \left[b - \frac{a}{Dy_n^2} \right],$$

$$f(t, x) = f_* \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) + (at + b) \frac{x}{x_0} - \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{y_n} (at + b) + e^{-Dy_n^2 t} \left[\frac{f_*}{y_n} - \frac{(-1)^n}{y_n} (2b + at) \right] \right] \sin(y_n x) \quad (17)$$

IV. ВПЛИВ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИБІРКИ НА ШУКАНУ ФУНКЦІЮ

Дослідимо на конкретних прикладах вплив статистичних характеристик вибірки експериментальних даних щодо шуканої функції на нижній границі шару. Експериментальні дані отримано для рівномірного розбиття часового інтервалу дослідження [2]. Розглянемо випадки великих і малих вибірок, які характеризуються великою або малою дисперсією.

A. Велика вибірка, велика дисперсія

Нехай вибірка експериментальних даних $F(t)$ обсягом $N = 33$ має вигляд

TABLE II.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
t_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(t_i) _{x_0}$	0	0.1109	0.2328	0.4609	0.5213	0.8142	0.9001	0.9871	1.0012	1.0932	1.1032
	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{16}	t_{17}	t_{18}	t_{19}	t_{20}	t_{21}	t_{22}
t_i	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1
$f(t_i) _{x_0}$	1.1193	1.1245	1.1721	1.3	1.3127	1.3547	1.4012	1.4478	1.6111	1.7214	1.7651
	t_{23}	t_{24}	t_{25}	t_{26}	t_{27}	t_{28}	t_{29}	t_{30}	t_{31}	t_{32}	t_{33}
t_i	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3	3.1	3.2
$f(t_i) _{x_0}$	1.7897	2.128	2.2023	2.4137	2.4895	2.7112	2.7338	2.7672	2.8018	2.8441	2.8739

Діапазон вибірки $R = [0, 2.87]$, $R = [0, 2.8441]$, вибіркова дисперсія $S_F^2 = 0.677215$.

Побудуємо лінійну регресію за даними вибірки табл. II. За виглядом кореляційного поля робимо припущення про лінійний характер часової залежності шуканої функції на нижній границі тіла $f(t)|_{x_0}$. За вибірковими даними коефіцієнти лінійної регресії (4) є $a = 0.860186$, $b = 0.148247$.

Тепер знайдемо надійні інтервали з надійністю $\beta = 0.95$ для коефіцієнтів a та b : $a \in (0,800735; 0,922897)$, $b \in (0,036363; 0,256763)$.

Нехай $a \in [a^-, a^+]$, $b \in [b^-, b^+]$ надійні інтервали для коефіцієнтів лінійної регресії a та b .

Позначимо $\delta_a(t, x) = f_a^+(t, x) - f_a^-(t, x)$ – ширина надійного інтервалу для розв'язку крайової задачі (1)-(3), (7), де $f_a^\pm(t, x)$ – розв'язок задачі при $a = a^\pm$ відповідно; $\delta_b(t, x) = f_b^+(t, x) - f_b^-(t, x)$ – ширина надійного інтервалу для $f(t, x)$, де $f_b^\pm(t, x)$ – розв'язок задачі при $b = b^\pm$.

Графіки лінійної регресійної моделі при граничних значеннях параметрів a і b з надійних інтервалів, отриманих з надійністю $\beta = 0.95$ наведено на рис. 1.

Тут і надалі на рис.1 а наведено графіки відповідної функції, знайденої для параметрів a (суцільна лінія), a^+ і a^- (штрихові лінії), а на рис. 1 б для параметрів b (суцільна лінія), b^+ і b^-

(штрихові лінії). Зеленими крапками відзначено експериментальні дані.

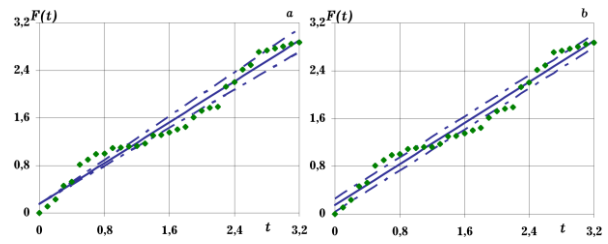


Рисунок 1. Лінійна регресія та надійні інтервали для великої вибірки з великою дисперсією

На рис. 2 показано розподіли шуканої функції та її надійні інтервали, обчислені в такі моменти часу $t = 0.1, 0.5, 2$ (криві 1-3). Криві з індексом “+” обраховані для верхніх меж надійних інтервалів, а з індексом “-” для нижніх.

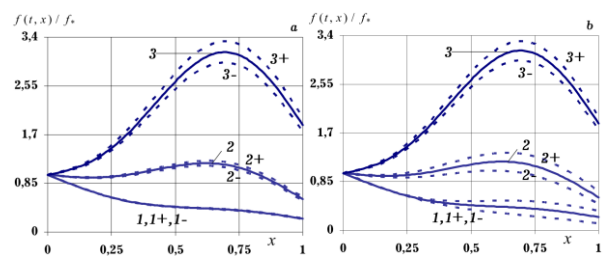


Рисунок 2. Графіки функції $f(t, x)$ та надійні інтервали для неї залежно від надійних інтервалів параметрів a та b в різні моменти часу

B. Мала вибірка, мала дисперсія

Розглянемо вибірку експериментальних даних $F(t)$ обсягом $N = 11$, яка подана в табл. III.

TABLE III.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
t_i	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3
$f(t_i) _{x_0}$	0	0.0132	0.0201	0.0512	0.0908	0.1114	0.1433	0.1947	0.2206	0.2752	0.2908

Діапазон вибірки $R = [0, 2.87]$, $R = [0, 0.2908]$, вибіркова дисперсія $S_F^2 = 0.011019$.

Надійні інтервали з надійністю $\beta = 0.95$ обчислені для коефіцієнтів $a = 0.1043$ та $b = -0.0282$ в таких межах $a \in (0.09253; 0.116136)$; $b \in (-0.04915; -0.00725)$.

Графіки функції $F(t)$ для коефіцієнтів a та b , знайдених методом найменших квадратів (суцільні лінії) і знайдених для параметрів a^+ , a^- та b^+ , b^- (штрихові лінії), показані на рис. 3.

На рис. 4 для малої вибірки з малою дисперсією, наведеною в табл. III, показано розподіли шуканої функції та її надійні інтервали, обчислені в такі моменти часу $t = 0.1, 0.5, 2$ (криві 1-3). Криві з індексами “+” та “-” пораховані для відповідних меж надійних інтервалів.

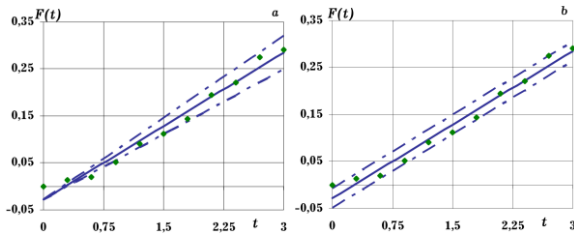


Рисунок 3. Лінійна регресія та надійні інтервали для малої вибірки з малою дисперсією

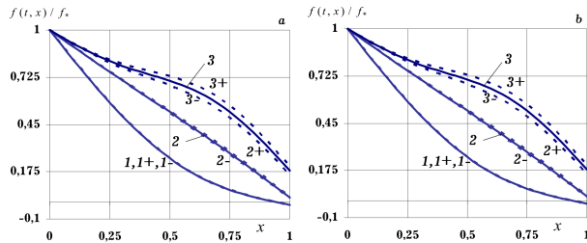


Рисунок 4. Графіки функції $f(t,x)$ та надійні інтервали для неї залежно від надійних інтервалів параметрів a та b в різні моменти часу

C. Мала вибірка, велика дисперсія

Нехай тепер вибірка експериментальних даних $F(t)$ обсягом $N = 11$ має вигляд

TABLE IV.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
t_i	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3
$f(t_i)_{exp}$	0	0.1987	0.5384	0.9201	1.534	1.795	2.5704	2.883	2.977	3.551	3.689

Діапазон вибірки $R = [0, 2.87]$, $R = [0, 3.689]$, вибіркова дисперсія $S_F^2 = 1.796015$.

Для даного випадку надійні інтервали для коефіцієнтів лінійної регресії (4), обчислені для $\beta = 0.95$, а саме $a = 1,33734$ та $b = -0,12814$, знайдені в наступних межах: $a \in (1,216502; 1,458176)$; $b \in (-0,342601; 0,086328)$

Графіки лінійної регресійної моделі при граничних значеннях параметрів a і b з надійних інтервалів, отриманих з надійністю $\beta = 0.95$ наведено на рис. 5.

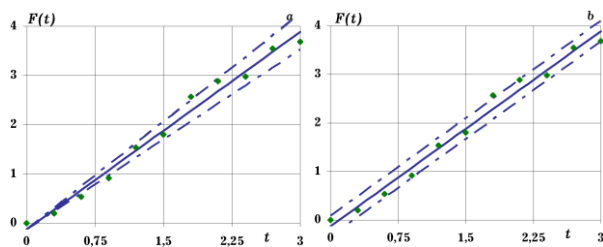


Рисунок 5. Лінійна регресія та надійні інтервали для малої вибірки з великою дисперсією

На рис. 6 для малої вибірки з великою дисперсією, наведеною в табл. IV, показано розподіли шуканої функції та її надійні інтервали, обчислені в такі моменти часу $t = 0.1, 0.5, 2$ (криві

1-3). Криві з індексами “+” та “-” порашовані для відповідних меж надійних інтервалів.

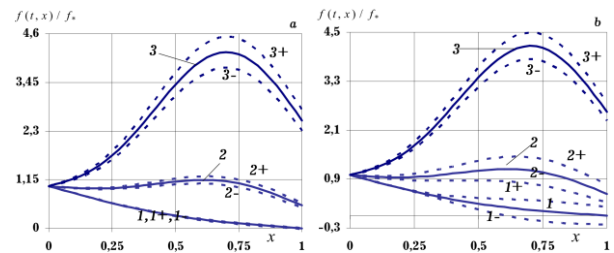


Рисунок 6. Графіки функції $f(t,x)$ та надійні інтервали для неї залежно від надійних інтервалів параметрів a та b в різні моменти часу

V. ВИСНОВКИ

Таким чином, зроблено постановку крайової задачі процесів перенесення в шарі, якщо на його нижній границі відомо експериментальні дані щодо шуканої функції в певні моменти часу. Розв’язок крайової задачі отримано за допомогою скінченного інтегрального перетворення Фур’є, коли на нижній границі тіла задано лінійну регресію, коефіцієнти якої знайдено методом найменших квадратів за заданими експериментальними даними. Встановлено надійні інтервали для коефіцієнтів рівняння регресії із заданим рівнем надійності. Визначено відповідні надійні інтервали для шуканої функції на основі отриманого розв’язку крайової задачі, причому їх межі визначено за межами надійних інтервалів для коефіцієнтів лінійної регресії.

Зауважимо, що чим більші абсолютні значення набуває шукана функція тим більшою є ширина надійного інтервалу. Для малих часів практично невідчутний вплив надійного інтервалу для параметра a , тоді як вплив надійного інтервалу для параметра b в рази більший, особливо в околі нижньої границі шару (криві 1 та 2, рис. 2 і 6). Відзначимо, що чим меншою є дисперсія вибірки експериментальних даних, тим меншою є ширина надійного інтервалу для розв’язку сформульованої крайової задачі (рис. 4).

Це дослідження було профінансовано грантом № ДР 0123U101691.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Бахрушин В.С. Методи аналізу даних. Запоріжжя: КПУ, 2011. 268 с.
- [2] “Probability Theory and Mathematical Statistics,” Edited by V. Grigelionis, De Gruyter, 2020, 624 p.
- [3] I. Sneddon, “The use of integral transforms,” Tata McGraw-Hill, 1979, 539 p.
- [4] “Handbook of Mathematical Functions,” Edited by M. Abramowitz and I. Stegun, Washington: U.S. Government Printing Office, 1984.
- [5] M. Apostol, “Equations of Mathematical Physics,” Cambridge: Cambridge Scholars Publishing, 2018.
- [6] E.J. Gumbel, “Statistics of Extremes,” Chicago: Dover Publications, 2004, 375 p.
- [7] I. Vuchkov, L. Boyadzhieva, E. Solakov, “Applied Linear Regression Analysis,” Moscow: Financy i statistika, 1987.