

Комп'ютерне моделювання дифузії домішкової речовини з випадкового точкового джерела маси

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2023.041>

Петро Пукач

Кафедра обчислювальної математики і
програмування
Національний університет “Львівська політехніка”,
м. Львів, Україна
petro.y.pukach@lpnu.ua

Юрій Чернуха

Кафедра обчислювальної математики і
програмування
Національний університет “Львівська політехніка”,
м. Львів, Україна
yurii.a.chernukha@lpnu.ua

Анотація—Робота присвячена моделюванню дифузійних процесів у шарі за дії випадково розташованого точкового джерела. Досліджені варіанти розташування джерела за рівномірним і трикутним розподілом на певному проміжку, а також два часткові випадки бета-розподілу, які відповідають найімовірнішому знаходженню точкового джерела маси в околі верхньої або нижньої границі шару.

Ключові слова—математичне моделювання, дифузія, випадкове точкове джерело, ймовірнісний розподіл.

I. ВСТУП

Причиною розгляду шуканих функцій як випадкових при математичному описі фізичних процесів в об'єктах природного середовища, в елементах складних конструкцій або при створенні та функціонуванні композитних матеріалів тощо, є недостатність інформації про внутрішню багатозначну або багатокомпонентну структуру тіла. Іншою причиною випадковості фізичних полів може бути дія випадкових джерел. У таких випадках потрібно враховувати задання статистики джерел, або статистики первинного поля.

У багатьох випадках в середині тіла діють джерела маси, які необхідно враховувати при дослідженні процесів масоперенесення та масообміну. Наприклад, процеси перенесення можуть супроводжуватися хімічними реакціями, наявні масові дефекти в ядрах атомів, в тілі відбуваються процеси кристалізації або танення і т.п. Задачі з точковими джерелами маси можуть виникати у різних галузях, наприклад, при аналізі руху та стійкості систем точкових мас, при наявності в тілі радіоактивного випромінювання, при необхідності враховувати гравітаційну взаємодію точкових мас, тощо. При цьому конкретне місце дії точкового джерела може бути невідомим.

У даній роботі розглядається крайова задача дифузії домішкової речовини в шарі при дії випадкового точкового джерела, коли ймовірнісний розподіл його розташування є рівномірним, трикутним або частковим випадком бета-розподілу.

II. ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДИFUZІЇ З ВИПАДКОВОГО ТОЧКОВОГО ДЖЕРЕЛА

Розглянемо дифузію домішкової речовини в шарі товщини x_0 за дії у випадковій точці $x_s \in (0, x_0)$ точкового джерела маси потужності ω . Рівняння дифузії отримано на основі законів Фіка у вигляді [1, 2]

$$\rho \frac{\partial c(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 c(t, x)}{\partial x^2} + \omega \delta(x - x_s), \quad (1)$$

де $c(t, x)$ – концентрація мігруючої речовини, ρ – густина тіла, d – кінетичний коефіцієнт перенесення, t – час, x – просторова координата, $\delta(x - x_s)$ – дельта-функція Дірака [3].

Нехай задано крайові умови першого роду. А саме, початкова умова є нульовою

$$c(t, x)|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

на обох поверхнях шару підтримуються сталі значення концентрації частинок

$$c(t, x)|_{x=0} = c_0 \equiv const, \quad c(t, x)|_{x=x_0} = c_* \equiv const. \quad (3)$$

Наявність в системі випадкового точкового джерела маси спричинює стохастичність шуканої функції, тобто випадковість поля концентрації домішки.

III. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДИFUZІЇ З ВИПАДКОВОГО ДЖЕРЕЛА

Шукатимемо розв'язок крайової задачі (1) – (3) у вигляді суми розв'язку однорідної крайової задачі і згортки функції Гріна з випадковим джерелом [1]. Маємо

$$c(t, x) = c^h(t, x) + \omega \int_0^t \int_0^{x_0} G(t, t'; x, x') \delta(x' - x_s) dx' dt'. \quad (4)$$

Тут $c^h(t, x)$ – розв'язок однорідної крайової задачі:

$$\rho \frac{\partial c^h(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 c^h(t, x)}{\partial x^2}, \quad (5)$$

$$c^h(t, x)|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

$$c^h(t, x)|_{x=0} = c_0, \quad c^h(t, x)|_{x=x_0} = c_*; \quad (7)$$

$G(t, t'; x, x')$ – функція Гріна неоднорідної задачі (1) – (3), яка за означенням є розв’язком задачі для рівняння

$$\rho \frac{\partial G}{\partial t} - d \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(t - t') \delta(x - x') \quad (8)$$

з нульовою початковою умовою

$$G(t, t'; x, x')|_{t=0} = 0 \quad (9)$$

та нульовими граничними умовами

$$G(t, t'; x, x')|_{x=0} = 0, \quad G(t, t'; x, x')|_{x=x_0} = 0. \quad (10)$$

Розв’язок однорідної крайової задачі (5) – (7) шукаємо зведенням її до задачі з нульовими граничними умовами і застосуванням інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною та скінченного інтегрального \sin -перетворення Фур’є за просторовою змінною [4]. В результаті одержимо

$$c^h(t, x) = c_0 \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) + c_* \frac{x}{x_0} + \frac{2}{\rho x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n} \left((-1)^n c_* - c_0 \right) e^{-\frac{dy_n^2 t}{\rho}} \sin(y_n x), \quad (11)$$

де $y_n = n\pi/x_0$.

Функцію Гріна шукаємо, розв’язуючи крайову задачу (8) – (10) також із застосуванням інтегральних перетворень Лапласа та Фур’є. Функція Гріна отримана у вигляді

$$G(t, t'; x, x') = \frac{2}{x_0} \theta(t - t') \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{dy_n^2 (t-t')}{\rho}} \sin(y_n x) \sin(y_n x'), \quad (12)$$

де $\theta(t - t')$ – одинична сходинова функція Гевісайда [5].

IV. УСЕРЕДНЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ ЗА ВИПАДКОВОЮ КООРДИНАТОЮ РОЗТАШУВАННЯ ДЖЕРЕЛА

Усереднимо функцію $c(t, x)$, яка є випадковим полем двох змінних. Врахуємо, що $c^h(t, x)$ – детермінована функція, тоді $\langle c^h(t, x) \rangle = c^h(t, x)$. Маємо

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \omega \left\langle \int_0^t \int_0^{x_0} G(t, t'; x, x') \delta(x' - x_s) dx' dt' \right\rangle. \quad (13)$$

Нехай $f(x_s)$ – функція розподілу випадкової величини x_s , яке є випадковою точкою, в якій діє точкове джерело. Тоді співвідношення (13) набуде вигляду

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \omega \int_{x_1}^{x_2} \int_0^t \int_0^{x_0} f(x_s) G(t, t'; x, x') \delta(x' - x_s) dx' dt' dx_s. \quad (14)$$

Тут проміжок $[x_1, x_2]$ – проміжок усереднення, причому $0 \leq x_1 < x_2 \leq x_0$.

Розглянемо деякі можливі варіанти функції розподілу $f(x_s)$.

A. Рівномірний розподіл

Нехай $f(x_s)$ – функція густини рівномірного розподілу на проміжку $[x_1, x_2]$, а саме $f(x_s) = (x_2 - x_1)^{-1}$.

Підставимо вираз для функції Гріна (12) в інтегральний доданок співвідношення (14). Після усереднення одержимо

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \frac{2\omega}{dx_0} \frac{\cos(x_1) - \cos(x_2)}{x_2 - x_1} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n^3} \left(1 - e^{-\frac{dy_n^2 t}{\rho}} \right) \sin(y_n x). \quad (15)$$

Якщо проміжок $[x_1, x_2]$ співпадає з усією областю тіла, тоді формула (15) зведеться до вигляду

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \frac{2\omega}{dx_0^2} [1 - \cos(x_0)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n^3} \left(1 - e^{-\frac{dy_n^2 t}{\rho}} \right). \quad (16)$$

B. Трикутний розподіл

Нехай точка дії точкового джерела маси x_s має трикутний розподіл на проміжку $[x_1, x_2]$, функція густини якого має вигляд

$$f(x_s) = \begin{cases} \frac{2}{x_2 - x_1} - \frac{2}{(x_2 - x_1)^2} [x_1 + x_2 - 2x_s], & x_s \in [x_1, x_2] \\ 0, & x_s \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

Тоді за формулою (14) для усередненої концентрації домішкової речовини отримаємо

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \frac{4\omega}{dx_0 (x_2 - x_1)^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n^4} \left(1 - e^{-\frac{dy_n^2 t}{\rho}} \right) \sin(y_n x) \times \left[2 \sin \left(y_n \frac{x_1 + x_2}{2} \right) - \sin(y_n x_1) - \sin(y_n x_2) \right]. \quad (17)$$

Якщо проміжок $[x_1, x_2] = [0, x_0]$, тоді маємо

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \frac{8\omega}{dx_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{y_n^4} \left(1 - e^{-\frac{dy_n^2 t}{\rho}} \right) \sin(y_n x). \quad (18)$$

C. Перший частковий випадок бета-розподілу

Розглянемо частковий випадок бета-розподілу розташування випадкового точкового джерела, який відповідає ситуації найімовірнішого знаходження джерела біля нижньої границі шару. Функція густини розподілу $f(x_s)$ у цьому випадку має вигляд [6]

$$f(x_s) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{x_s}{x_0} \right)^{\alpha-1}, & x_s \in [0, x_0], \\ 0, & x_s \notin [0, x_0], \end{cases}$$

де α – ступінь вільності розподілу. Зазначимо, що зі збільшенням параметра α імовірність знаходження точкового джерела біля поверхні $x=0$ спадає, а в околі нижньої границі $x=x_0$ – зростає.

Підставимо вираз для $f(x_s)$ у співвідношення (14). Маємо

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \frac{2\omega\alpha}{dx_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n^2} \left(1 - e^{-\frac{dy_n^2 t}{\rho}} \right) \sin(y_n x) \times \int_0^{x_0} \left(\frac{x_s}{x_0} \right)^{\alpha-1} \sin(y_n x_s) dx_s. \quad (19)$$

D. Другий частковий випадок бета-розподілу

Нехай розташування випадкового точкового джерела найбільш імовірно біля верхньої границі шару. В цьому випадку функція густини розподілу $f(x_s) \in [6]$

$$f(x_s) = \begin{cases} \beta \left(1 - \frac{x_s}{x_0} \right)^{\beta-1}, & x_s \in [0, x_0], \\ 0, & x_s \notin [0, x_0] \end{cases}$$

де β – ступінь вільності розподілу. Зауважимо, що зростання значення ступеня вільності β призводить до більш імовірного розташування точкового джерела біля поверхні $x=0$, у той же час імовірність розташування джерела в околі іншої границі шару зменшується.

Якщо підставимо густину розподілу у співвідношення (14), отримаємо

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \frac{2\omega\beta}{dx_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n^2} \left(1 - e^{-\frac{dy_n^2 t}{\rho}} \right) \sin(y_n x) \times \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{x_s}{x_0} \right)^{\beta-1} \sin(y_n x_s) dx_s. \quad (20)$$

Проведемо числові експерименти для всіх чотирьох варіантів імовірнісного розподілу розташування точкового джерела в області тіла.

V. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ УСЕРЕДНЕНОЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ ДОМІШКОВОЇ РЕЧОВИНИ

Числові розрахунки тут і надалі проведені у безрозмірних змінних $\xi = x/x_0$, $\tau = d/(\rho x_0^2)t$. За базові параметри задачі прийнято: $d=1$, $\rho=1$, $\omega=7$, $\xi_0=1$, $\xi_1 = x_1/x_0 = 0.3$, $\xi_2 = x_2/x_0 = 0.7$, $c_0=1$, $c_* = 0.25$.

Розподіли усередненої концентрації домішкової речовини за різних густин функції розподілу випадкового розташування точкового джерела наведено на рис. 1–4. Криві 1–4 обчислені для різних значень безрозмірного часу $\tau = 0.01, 0.05, 0.2, 1$ відповідно. Ряди у формулах (15) – (20) були підсумовані з точністю 10^{-7} .

Рис. 1 ілюструє розподіли усередненої концентрації частинок домішки в шарі безрозмірної товщини ξ_0 за рівномірного на проміжку $[\xi_1, \xi_2]$ ймовірнісного розподілу координати джерела маси. Розрахунки проводилися за формулами (15), (16). Рис. 2 показує поведінку функції $\langle c(\tau, \xi) \rangle$, обчисленої за формулами (17), (18) у випадку трикутного розподілу місця дії точкового джерела x_s . Тут рис. 1a, 2a наведені для ненульового інтервалу рівномірного і трикутного розподілів $[\xi_1, \xi_2]$ значно меншого ніж товщина шару, рис. 1b, 2b – для випадку співпадіння проміжку $[\xi_1, \xi_2]$ зі всією областю тіла $[0, \xi_0]$.

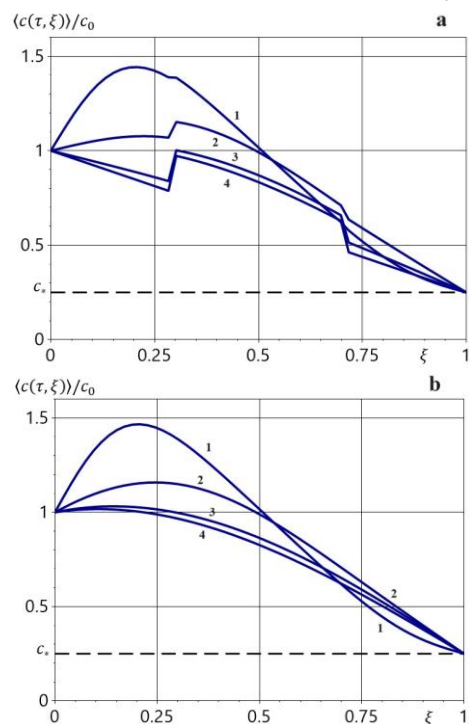


Рисунок 1. Графіки усередненої концентрації домішки за рівномірного розподілу розташування точкового джерела маси

Рис. 3 для найімовірнішого розташування джерела в околі нижньої границі шару проілюстровано для $\alpha = 1.5$ (рис. 3a) і $\alpha = 6$ (рис. 3b). Обчислення функції $\langle c(\tau, \xi) \rangle$ виконані за формулою (19). Рис. 4

показує поведінку функції усередненої концентрації за найбільш ймовірної дії точкового джерела маси в околі верхньої границі для $\beta = 1.5$ (рис. 4a) і $\beta = 6$ (рис. 4b). У цьому випадку розрахунки проводилися за співвідношенням (20).

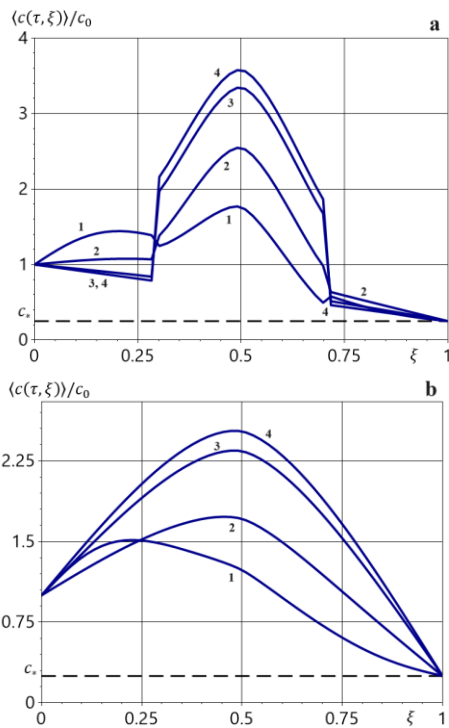


Рисунок 2. Графіки усередненої концентрації домішки за трикутного розташування точкового джерела маси

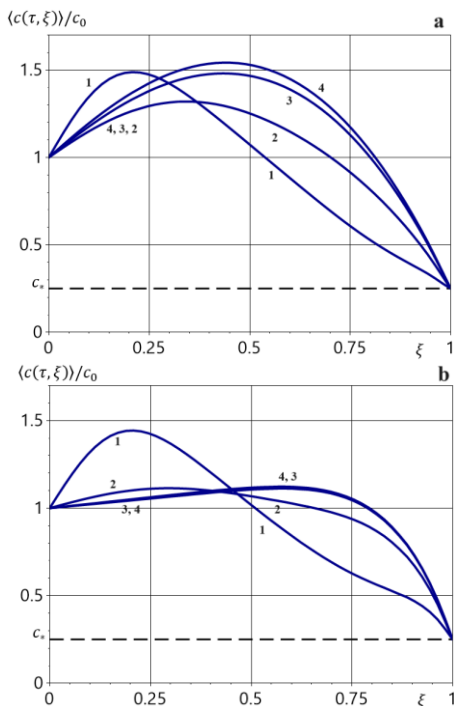


Рисунок 3. Графіки усередненої концентрації домішки за найімовірнішого розташування точкового джерела маси в околі нижньої границі шару

Зазначимо, що наявність точкового джерела маси збільшує значення концентрації мігруючої речовини у всій області тіла. При цьому спостерігається характерне зростання функції усередненої концентрації від поверхні тіла (рис. 1b, 3a, 4a, 4b) або всередині шару (рис. 1a, 2a, 2b, 3b). Для всіх

розглянутих імовірнісних розподілів безрозмірний час виходу на стаціонарний режим є однаковим $\tau = 1.5$. Ймовірнісний розподіл місця розташування джерела і наявність інтервалу $[\xi_1, \xi_2]$ визначення розподілу суттєво впливає на поведінку усередненої концентрації домішки (рис. 1–4). У випадку рівномірного розподілу для малих часів характерне значне зростання концентрації домішки від поверхні $\xi = 0$ (криві 1 на рис. 1a, 1b). Зі збільшенням часу протікання процесу дифузії у верхній частині шару значення концентрації зменшуються (рис. 1). Причому ці зміни відбуваються тим повільніше, чим

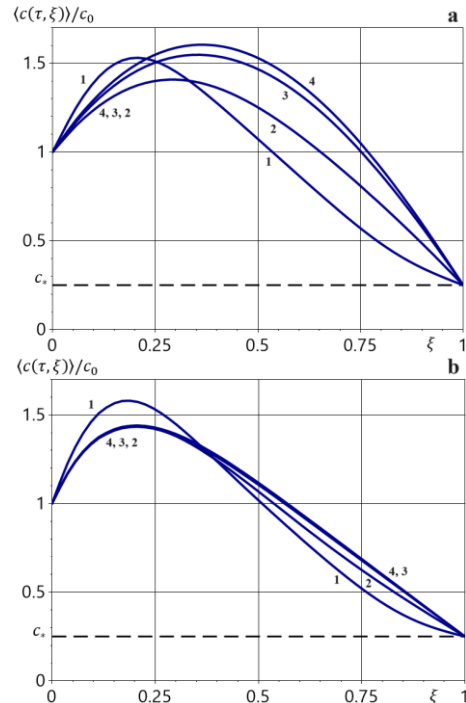


Рисунок 4. Графіки усередненої концентрації домішки за найімовірнішого розташування точкового джерела маси в околі верхньої границі шару

більшим є τ . У випадку, коли інтервал розподілу співпадає з усією областю тіла, функція усередненої концентрації завжди є гладкою (рис. 1b). Якщо ж інтервал розподілу менший товщини шару, тоді спостерігається різке збільшення усередненої концентрації в околі точки $\xi = \xi_1$ і різке зменшення в околі $\xi = \xi_2$. При цьому таке зростання $\langle c(\tau, \xi) \rangle$ є меншим для малих часів і збільшується з ростом τ (рис. 1a).

Для трикутного розподілу розташування точкового джерела маси характерне значно більше зростання усередненої концентрації на проміжку $[\xi_1, \xi_2]$ ніж у випадку рівномірного розподілу (рис. 1a і 2a), і внесок точкового джерела маси значно перевищує внесок від розв'язку однорідної задачі. Також спостерігається наявність максимуму $\langle c(\tau, \xi) \rangle$, величина якого зростає зі збільшенням часу протікання процесу дифузії (рис. 2). При цьому, якщо інтервал розподілу співпадає з усією областю тіла, цей максимум з часом зсувається до середини шару (рис. 2b), в іншому випадку точка максимуму функції усередненої концентрації не змінюється (рис. 2a).

У випадку найбільш імовірного розташування точкового джерела маси в околі однієї з границь

шару для малих ступенів вільностей також характерне приповерхнєве зростання усередненої концентрації для малих часів (криві 1, рис. 3а, 4а), яке спочатку зменшується, а потім збільшується і зсувається вглиб тіла (криві 2–4, рис. 3а, 4а). При великих α зі збільшенням часу дифузійного процесу максимум усередненої концентрації зсувається у другу половину шару (криві 3, 4, рис. 3б), проте його значення зростає несуттєво. У випадку найімовірнішого розташування точкового джерела в околі поверхні $\xi = 0$ максимум $\langle c(\tau, \xi) \rangle$ незначно зсувається вглиб шару на інтервалі [0.2, 0.37] (рис. 4б).

VI. АНАЛІЗ ВКЛАДУ ДОДАНКІВ В УСЕРЕДНЕНУ КОНЦЕНТРАЦІЮ ДОМІШКОВОЇ РЕЧОВИНИ

Для визначення вкладу доданків у розв'язки для усередненої концентрації наведено таблиці I і II, в яких для безрозмірного часу $\tau = 1$ представлено значення функцій $\langle c(\tau, \xi) \rangle$, $c^h(\tau, \xi)$, згортки функції Гріна з джерелом при $\omega = 1$

$$I(\tau, \xi) = \left\langle \int_0^t \int_0^{x_0} G(t, t'; x, x') \delta(x' - x_s) dx' dt' \right\rangle,$$

а також різниці $\Delta(\tau, \xi) = |c^h(\tau, \xi) - I(\tau, \xi)|$.

Дані табл. I для рівномірного розподілу і табл. II для трикутного розподілу на проміжку [0.3, 0.7] розташування точкового джерела маси наведені в моменти часу $\tau = 1$.

ТАБЛИЦЯ I.

ξ	$\langle c(\tau, \xi) \rangle$	$c^h(\tau, \xi)$	$I(\tau, \xi)$	$\Delta(\tau, \xi)$
0	1	1	0	1
0.1	0.925008	0.925008	0	0.925008
0.2	0.850015	0.850015	0	0.850015
0.3	0.973376	0.77502	0.198356	0.576664
0.4	0.913357	0.700023	0.213334	0.48669
0.5	0.833369	0.625025	0.208345	0.41668
0.6	0.736717	0.550023	0.186694	0.363329
0.7	0.626699	0.47502	0.151679	0.32334
0.8	0.400015	0.400015	0	0.400015
0.9	0.325008	0.325008	0	0.325008
1	0.25	0.25	0	0.25

Зазначимо, що для рівномірного розподілу на проміжку $[\xi_1, \xi_2]$ розташування точкового джерела маси для малих часів протікання процесу дифузії різниця $\Delta(\tau, \xi)$ між розв'язком однорідної задачі та інтегральним доданком $I(\tau, \xi)$ розв'язку неоднорідної задачі є монотонно спадною функцією. Для великих τ функція $\Delta(\tau, \xi)$ спадає від границі $\xi = 0$, проте у другій половині шару наявний її локальний максимум (табл. I). Наприклад, $\max_{\xi \in (0.5\xi_0, \xi_0)} \Delta(\tau, \xi) \Big|_{\tau=1} \approx 0.4$. У випадку трикутного розподілу розташування джерела на проміжку $[\xi_1, \xi_2]$ функція $\Delta(\tau, \xi)$ спочатку зростає на проміжку [0,0.2], потім відбувається різке падіння і подальше зростання цієї функції до досягнення локального максимуму в точці $\xi_{\max} = 0.5$. З ростом τ максимум різниці зсувається вглиб тіла. Так, для $\tau = 1$ точка, в якій спостерігається максимум є $\xi_{\max} = 0.5$, причому

$\max_{\xi \in (0, \xi_0)} \Delta(\tau, \xi) \Big|_{\tau=1} = 2.329$ (табл. II). Для рівномірного

розподілу на проміжку $[\xi_1, \xi_2]$ величина інтегрального доданку завжди менша ніж $c^h(\tau, \xi)$, причому в усій області тіла (табл. I). У той же час у випадку трикутного розподілу інтегральний доданок відмінний від нуля тільки в $[\xi_1, \xi_2]$, проте може перевищувати величину $c^h(\tau, \xi)$ (табл. II).

ТАБЛИЦЯ II.

ξ	$\langle c(\tau, \xi) \rangle$	$c^h(\tau, \xi)$	$I(\tau, \xi)$	$\Delta(\tau, \xi)$
0	1	1	0	1
0.1	0.925008	0.925008	0	0.925008
0.2	0.850015	0.850015	0	0.850015
0.3	2.147508	0.77502	1.372488	0.597468
0.4	3.071903	0.700023	2.37188	1.671856
0.5	3.579042	0.625025	2.954018	2.328993
0.6	2.921903	0.550023	2.37188	1.821856
0.7	1.847508	0.47502	1.372488	0.897468
0.8	0.400015	0.400015	0	0.400015
0.9	0.325008	0.325008	0	0.325008
1	0.25	0.25	0	0.25

VII. ВИСНОВКИ

Таким чином проведено моделювання процесу дифузії домішкової речовини в шарі за дії випадкового точкового джерела. Розв'язок крайової задачі знайдений у вигляді суми розв'язку однорідної задачі і згортки функції Гріна з джерелом. Усереднення отриманого розв'язку виконане для рівномірного і трикутного розподілів на підінтервали і в усій області тіла. Розглянуто випадки найімовірнішого розташування випадкового точкового джерела в околі верхньої і нижньої границь шару. Розроблено програмні модулі для симуляції поведінки усередненої концентрації за різних імовірнісних розподілів розташування точкового джерела. Встановлено основні закономірності шуканої функції в залежності від параметрів задачі. Зокрема показано, що наявність точкового джерела маси збільшує значення концентрації мігруючої речовини, при цьому спостерігається характерне зростання функції усередненої концентрації від поверхні тіла або всередині шару. Також проаналізовано вклад доданків в усереднену концентрацію домішкової речовини і визначено, що для рівномірного розподілу на підінтервалі величина інтегрального доданку завжди менша ніж розв'язок однорідної задачі. А у випадку трикутного розподілу інтегральний доданок відмінний від нуля тільки в інтервалі розподілу, проте може перевищувати розв'язок однорідної задачі.

Результати отримані при виконанні держбюджетної науково-технічної теми з фундаментальних досліджень (№ державної реєстрації 0123U101691).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Г.П. Лопушанська, О.М. Бугрій, А.О. Лопушанський, "Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики," Львів: Видавець І. Е. Чижиков, 2012, 362 с.
- [2] J. Crank, "The mathematics of diffusion," 2nd ed., Oxford: Clarendon Press, 1975.
- [3] M. Abramowitz, and I.A. Stegan, "Handbook of Mathematical Functions," National Bureau of Standards Applied Mathematics, 1964.
- [4] I.N. Sneddon, "Fourier transforms," New York: Dover Publications, Inc., 1995.
- [5] G.A. Korn, and T.M. Korn, "Mathematical handbook for scientists and engineers," 2nd ed., Mineola: Dover Publications, Inc., 2000.
- [6] О.Ю. Чернуха, Ю.І. Білушак, А.С. Чучвара, "Моделювання дифузійних процесів у стохастично неоднорідних шаруватих структурах," Львів: Растр-7, 2016.