

Спосіб формалізації та метод розв'язання багатокритеріальної задачі комівояжера

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.091>

Євген Івохін
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Київ, Україна
ivohin@univ.kiev.ua

Костянтин Юштин
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Київ, Україна
gkons@mail.univ.kiev.ua

Андрій Улеєв
Факультет транспортних та інформаційних технологій
Національний транспортний університет
Київ, Україна
uleiev.a@gmail.com

Анотація – У статті розглянуто один зі способів формалізації двокритеріальної задачі комівояжера та метод знаходження компромісного розв'язку за умови антагоністичності критеріїв задачі. Для розв'язання задачі комівояжера з багатьма критеріями розроблено алгоритм, який використовує алгоритмічне визначення компромісу. Описано схему застосування алгоритму на основі запропонованої модифікації методу Пріма. Проведено аналіз отриманих результатів, визначено напрямки подальшого розвитку запропонованої методики.

Ключові слова – задача комівояжера, двокритеріальна задача, алгоритм Пріма, схема знаходження компромісу, алгоритмічний підхід

I. ВСТУП

Розв'язання сучасних проблем логістики передбачає аналіз і оптимізацію логістичних операцій, включаючи планування, координацію та контроль руху та зберігання товарів, послуг і інформації, оптимізацію потоків у мережі [1-2]. Завдяки методам і моделям імітаційного моделювання можна створювати комп'ютерні моделі логістичної системи та використовувати їх для тестування різних сценаріїв та оптимізації продуктивності системи.

Однією з найбільш відомих оптимізаційних задач комбінаторного типу є задача комівояжера, зміст якої полягає у необхідності скласти маршрут руху в рамках заданої сукупності зв'язаних між собою пунктів (міст), що утворюють транспортну мережу конкретного регіону [3]. Комівояжеру необхідно скласти маршрут, за яким він має відвідати усі міста мережі з урахуванням критерію, за яким відстань, яку потрібно подолати, або час подолання були мінімальними. Особливістю задачі є те, що маршрут повинен проходити через усі пункти, причому, кожен з пунктів потрібно відвідати не більше одного разу.

Залучення математичних підходів для розв'язування логістичних задач набуває широкого впровадження, конкретний зміст якого залежить від

характеру проблеми та наявних даних. Іноді виникають і потребують дослідження та розв'язання нетипові постановки класичних задач, однією з яких є задача комівояжера.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА ТА АНАЛІЗ СПОСОБІВ ЇЇ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Задача комівояжера - комбінаторна задача, для розв'язання якої можна використовувати методи математичного програмування. Для визначеності можна пронумерувати міста числами $(1, 2, 3, \dots, n)$, тоді маршрут комівояжера визначається циклічною перестановкою номерів $t = (j_1, j_2, \dots, j_n, j_1)$, де $j_i \in \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n}$, причому усі номери j_1, \dots, j_n - різні. Будь-яка перестановка з номерів, яка подана у такому вигляді, представляє можливий розв'язок задачі, а отже, існує $(n-1)!$ можливих шляхів для побудови його маршруту. Проблема комівояжера полягає в тому, щоб вибрати оптимальний з точки зору довжини або тривалості подорожі маршрут, який задовольняє деяким заданим обмеженням.

Сукупність міст мережі можна розглядати у вигляді вершин деякого графу з заданими відстанями (або часом пересування) між усіма парами вершин r_{ij} , які утворюють матрицю $R = \{r_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$. Вважаємо матрицю симетричною. Тоді формальне завдання полягає у тому, щоб знайти найкоротший маршрут (за часом або довжиною), який проходить через кожне місто та закінчується в точці відправлення.

Змінними задачі є елементи бінарної матриці переходів між вершинами $X = \{x_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, які дорівнюють 1, якщо у побудованому маршруті для задачі присутнє ребро (v_i, v_j) , 0 - у іншому випадку. Оптимальним є найкоротший за відстанню або за часом маршрут:

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n r_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

з обмеженнями

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$v_i - v_j + nx_{ij} \leq n - 1, 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Зрозуміло, що проблема розв'язання задачі (1), (2) з метою знаходження оптимального маршруту представляє собою класичний варіант постановки задачі комівояжера, при вирішенні якої в якості критерію окрім згаданих вище можуть розглядатися вартість перевезень (проїзду), ефективність руху за маршрутом з урахуванням обсягу або ваги вантажних перевезень, тощо. Характерною рисою усіх таких задач є наявність лише одного критерію оптимальності вибору маршруту.

Одним з варіантів двокритеріальної задачі комівояжера є задача пошуку оптимального за довжиною та тривалістю проїзду маршруту на основі одночасного застосування критеріїв виду (1).

Дво- та багатокритеріальні задачі комівояжера можуть виникати й у інший спосіб. Припустимо, що у традиційній постановці задачі додатково формулюється умова щодо визначеного порядку проїзду на заданій мережі, наприклад, у вигляді першочерговості відвідування (за маршрутом конкретно визначений вузол i має обов'язково передувати іншому заданому вузлу j). Така вимога не суттєво ускладнює процес розв'язання задачі, для чого у методах потрібно лише вибракувувати усі розв'язки, в яких не виконується згадана умова.

III. ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Серед різних узагальнених постановок задачі комівояжера варто приділити увагу задачам з декількома критеріями оптимальності. Розглянемо для визначеності задачу комівояжера з двома критеріями, у яких будемо мінімізувати сумарну відстань та час переміщення за маршрутом. Іншими словами, у постановці задачі комівояжера (1), (2) замість єдиного критерію визначимо два інших

$$F_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (4)$$

де величини d_{ij} та t_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, є елементами відповідних матриць $D = \{d_{ij}\}$, та $T = \{t_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, які визначають відстані та час переміщення між усіма парами вершин транспортної мережі.

Використання двокритеріальної задачі додатково ускладнює процес розв'язання задачі комівояжера. Виникають питання щодо формулювання у цьому випадку поняття ефективного розв'язку за умови антагоністичності сформульованих критеріїв та застосування методів розв'язування відповідної задачі.

Завданням дослідження є розробка методики для формалізації способів розв'язання двокритеріальної задачі комівояжера на основі модифікації критеріальних функцій шляхом їх зведення до одного критерія [4] або застосування алгоритмічного підходу.

IV. ЗАПРОПОНОВАНИЙ АЛГОРИТМ

Дійсно, за наявності різних оптимальних маршрутів у задачі комівояжера за окремих критеріїв, які визначаються у вигляді відповідних послідовностей вузлів мережі, формулювання компромісної послідовності буде вимагати створення правил врахування величин заданих критеріїв та схем модифікації сукупності розв'язків з метою визначення номерів етапів компромісного маршруту. Іншими словами, у цьому випадку потрібно вирішити завдання щодо визначення методики переформатовування (зміни) наявних оптимальних послідовностей з метою узгодження величин критеріїв якості маршруту.

Розглянемо підхід, на базі якого можна провести цілеспрямовані перестановки у послідовностях, що складаються з деякої множини вузлів.

Припустимо, що в багатокритеріальній задачі комівояжера розглядається l критеріїв. Для кожного з них отримано оптимальні маршрути у вигляді послідовностей p_k , $k = \overline{1, l}$. Вважаємо, що усі маршрути відповідають обмеженням задачі: починаються й завершуються в одному вузлі та складаються з номерів вузлів, що не повторюються.

Без обмеження конструктивності можна припустити, що послідовності містять неспівпадаючі між собою підпослідовності (принаймні, одну), які складаються з однієї й тієї ж сукупності вузлів. Такі послідовності описують можливі маршрути переміщень на відповідній множині вузлів. Зрозуміло, що початковий і кінцевий вузли в усіх підпослідовностях мають бути однаковими, але їх номери не повинні між собою співпадати. Остання вимога актуальна лише для повної послідовності вузлів транспортної мережі: у цьому випадку розглядаються підпослідовності без кінцевої вершини, що містять усі номери вузлів мережі, але такі, в яких співпадають передостанні номери. Зауважимо, що за умови неспівпадіння цих номерів знайти компромісний маршрут за допомогою даного підходу неможливо.

Таким чином, будемо вважати, що маємо деяку сукупність номерів вузлів мережі $q = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$, з яких утворюються різні послідовності, що є частинами оптимальних

маршрутів комівояжера при різних критеріях p_k , $k = \overline{1, l}$. Правила перестановки з метою погодження величин критеріїв залишаються невизначеними, а повний перебір неможливий навіть при досить невеликих наборах вузлів (наприклад, при $s > 20$).

Тоді можна розглядати компроміс у вигляді послідовності, яку буде отримано в результаті використання деякого додаткового алгоритму, який відноситься до класу комбінаторних оптимізаційних методів і за змістом відповідає постановці вихідної задачі. Для задачі комівояжера в якості такого алгоритму може бути використаний алгоритм на основі методу Пріма [5], який дозволяє побудувати мінімальне кістякове дерево (остов) зваженого зв'язного неорієнтованого графу.

Потрібно зауважити, що формальне застосування алгоритму Пріма не дозволяє визначити маршрут без повторень. Для використання методу Пріма в якості алгоритму для пошуку компромісу накладемо умову, аналогічну умові задачі комівояжера. Отже, будемо шукати маршрут на остовному підграфі транспортної мережі, пункти відвідування в якому не повторюються.

Отриманий в результаті роботи запропонованого алгоритму маршрут на множині вузлів q будемо вважати частиною компромісного маршруту в багатокритеріальній задачі комівояжера і називати побудований у такий спосіб розв'язок задачі *алгоритмічно* компромісним, підкреслюючи його залежність від застосованого при обчисленні методу.

Запропонований підхід не завжди дозволяє побудувати шуканий маршрут у підграфі. При побудові остовного дерева часто має місце невелика кратність вузлів, в наслідок чого формування шляхів, що відрізняються від отриманих за окремими критеріями маршрутів, неможливе.

Для такого випадку вихід було знайдено у збільшенні кількості вузлів підграфу, який подається на вхід алгоритму. Послідовність для пошуку компромісу можна розширити хоча б одним вузлом, додавши його спочатку або у кінці з відповідних пар підпослідовностей, які співпадають.

Для аналізу ефективності роботи алгоритму було проведено обчислювальні експерименти на прикладі розв'язання задачі комівояжера з двома критеріями на транспортній мережі з 11 пунктів [6]. Проведено аналіз отриманих результатів.

Потрібно зауважити, що вигляд алгоритмічного компромісного розв'язку залежить від обраного

алгоритму для знаходження альтернативи на ділянках неспівпадіння послідовностей та від вигляду цільової функції, що розглядається на відповідній підпослідовності. Але такий підхід повністю відповідає методиці пошуку компромісних рішень у багатокритеріальних неперервних і дискретних задачах оптимізації, в яких остаточний вигляд компромісу на заданій множині альтернатив визначається методом його пошуку.

ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто спосіб формалізації двокритеріальної задачі комівояжера та спосіб знаходження компромісного розв'язку за умови антагоністичності критеріїв. Для розв'язання отриманої задачі запропоновано алгоритм, що базується на алгоритмічному обчисленні компромісу. Описано схему застосування алгоритму на основі розробленої модифікації методу Пріма, що дозволило отримати конструктивну процедуру розв'язання двокритеріальної задачі комівояжера. Наведено результати роботи алгоритму для знаходження компромісних розв'язків задачі комівояжера за критерієм мінімізації тривалості руху та додаткової вимоги щодо порядку переміщення, проведено аналіз отриманих результатів. Зроблено висновки, запропоновано подальший розвиток запропонованої методики для розв'язання нечіткої задачі комівояжера [7] з багатьма критеріями.

REFERENCES

- [1] Martin Christopher. Logistics and Supply Chain Management. - FT Publishing International, 5th edition, 2016. – 328 p.
- [2] Alan Harrison, Remko van Hoek. Logistics Management and Strategy. - Financial Times Management, 2nd edition, 2005. – 308 p.
- [3] Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. - К.: Видавничий дім «Слово», 2006. – 816с.
- [4] Івохіна К.Е., Гавриленко В.В. Про один метод розв'язання задачі комівояжера з двома критеріями // Тези I міжнародної науково-практичної конф. «Штучний інтелект та інформаційні технології», Київ, КНУХТ, 3-4 червня 2024. - С.230-232.
- [5] Ajay D. Kshemkalyani, Mukesh Singhal. Distributed Computing: Principles, Algorithms, and Systems. - Cambridge University Press, 2011. – 414 p.
- [6] Ivohin E. V., Gavrylenko V. V., Ivohina K. E. On the recursive algorithm for solving the traveling salesman problem on the basis of the data flow optimization method // Radio Electronics, Computer Science, Control. - 2023. - № 3. – P. 141-147.
- [7] Юштин К.Е., Івохін Е.В. Про вплив способів дефазифікації на результати розв'язання нечіткої задачі комівояжера // Штучний інтелект. - 2024. - №1 (96). - P.93-103..