

Математична модель нелінійної неізометричної фільтрації з умовами спряження

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.093>

Петро Мартинюк

Національний університет водного господарства та
природокористування
Рівне, Україна
p.m.martyniuk@nuwm.edu.ua

Оксана Остапчук

Національний університет водного господарства та
природокористування
Рівне, Україна
o.p.ostapchuk@nuwm.edu.ua

Ольга Мічута

Національний університет водного господарства та
природокористування Рівне, Україна
o.r.michuta@nuwm.edu.ua

Олег Мельничук

Національний університет водного господарства та
природокористування Рівне, Україна
melnychuk.o_ak21@nuwm.edu.ua

Анотація – Запропоновано вдосконалити математичну модель процесу пружної фільтрації в пористому середовищі із тонким слабопроникним включенням. Вдосконалення полягають в урахуванні впливу неізотермічності процесу фільтрації на утримуючий градієнт напорів. Утримуючий градієнт напорів, як один із параметрів нелінійного закону Дарсі в слабопроникних пористих середовищах, є залежним від температури. Сформовано відповідну крайову задачу. Її числовий розв'язок знайдено методом скінченних елементів. Особлива увага приділена програмній реалізації числового розв'язання нелінійної крайової задачі в неоднорідному середовищі.

Ключові слова—нелінійний закон Дарсі; утримуючий градієнт напорів; температура; тонке включення; числові методи; Python

I. ВСТУП

В роботах [1-8] побудовано та чисельно досліджено математичні моделі фільтраційної консолидації в пористих середовищах із тонкими слабопроникними включеннями. Особливістю моделей є, по-перше, наявність умов спряження та можливість розриву розв'язків відповідних крайових задач. А також, по-друге, врахована можлива зміна фільтраційних характеристик матеріалу тонкого включення від фізико-хімічного стану порової рідини. В такому випадку умови спряження набувають неklasичного, інтегрального вигляду.

Якщо розглядати тонкі включення як спеціальні, штучно створені в процесі людської діяльності, то їх найчастіше роблять із глинистих матеріалів. Глина – один із природних пористих матеріалів, для якого закон Дарсі набуває явно вираженого нелінійного характеру. В роботі [5] враховано і досліджено ефект нелінійності в законі Дарсі, а також ефект

модифікації умов спряження на тонкому слабопроникному включенні. При цьому в роботі доведено існування, єдиність та встановлено точність наближеного узагальненого розв'язку відповідної нелінійної крайової задачі.

Тонкі геобар'єри застосовуються як захисні елементи в сховищах твердих побутових відходів. В процесі біодеградації органічних решток сховища відходів стають джерелами тепла [9, 10]. В результаті виникає актуальна задача дослідження впливу температури на нелінійні ефекти в законі Дарсі. Основою для урахування таких ефектів в математичних моделях є натурні експерименти, проведені в роботах [10, 11].

У багатьох випадках, процес фільтрації підпорядковується нелінійним рівнянням, серед яких основним є рівняння Дарсі. Через складність цих рівнянь та граничних умов, найефективнішим способом їх вирішення є чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів (МСЕ). Цей метод дозволяє розбивати складні області на невеликі елементи (власне, що і стало основою для назви методу), які є носіями відповідних поліноміальних базисних функцій. Як свідчить багаторічний досвід застосувань, МСЕ забезпечує точність результатів навіть при складних граничних умовах та нелінійних залежностях.

Метод скінченних елементів є потужним інструментом для моделювання задач фільтрації, в неоднорідних середовищах [12]. Адаже в його основі лежить теорія методу Бубнова-Гальоркіна, як одного з проєкційних методів, який дозволяє шукати наближені узагальнені розв'язки крайових задач. Перехід від «класичного» до «узагальненого» розв'язку забезпечує можливість строгого

теоретичного обґрунтування та можливість розривів на тонких слабопроникних включеннях.

Ключовим аспектом роботи є не лише математична модель, але й її програмна реалізація з використанням мови програмування Python та бібліотек NumPy, SciPy для чисельних розрахунків. Це дозволить ефективно вирішувати задачі нелінійної неізотермічної фільтрації та краще зрозуміти вплив температури на фільтрацію, що допоможе в прикладних задачах різних галузей.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Розглянемо задачу для полігону захоронення твердих побутових відходів. Область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (рис. 1) описує двошаровий ґрунтовий масив, який знаходиться в основі сховища твердих побутових відходів. У цій області присутній геобар'єр ω , виконаний з тонкого шару геосинтетичного матеріалу, товщиною d , який знаходиться на глибині $x = \xi$. Геобар'єри використовуються для захисту підземних вод від проникнення забруднюючих речовин із полігону, однак внаслідок біохімічних процесів у полігоні відбувається підвищення температури [9]. Оскільки геобар'єр, як тонке включення, формується із слабопроникних геоматеріалів, то в класичному законі Дарсі починають проявлятися нелінійні ефекти. В сформованій нижче математичній моделі такі нелінійні ефекти враховано через наявність порогового градієнта напору. Величина даного порогового градієнта напору обернено пропорційна до значень проникності пористого середовища (див. роботу [5] та наведений там огляд). Однак, як показано в роботах [10, 11] його значення також залежать і від теплового стану пористого середовища. Саме це і враховано в математичній моделі.

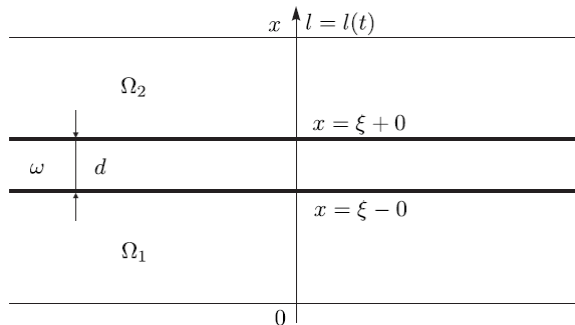


Рис. 1. Шар ґрунту товщиною l з тонким включенням ω товщиною d

Висока температура та зміни вологісного режиму можуть впливати на фільтраційні властивості ґрунту і створювати нерівномірний розподіл напорів, що підвищує ризик виникнення небезпечних ситуацій, таких як розгерметизація полігону.

Задача полягає в тому, щоб змоделювати процес консолідації повністю насиченого пористого середовища з геобар'єром в умовах підвищення температури та врахувати ефекти термоосмосу. Необхідно визначити розподіл напорів $h(x,t)$ і

температури $T(x,t)$ в товщі пористого середовища, а також врахувати вплив температурних змін на процес фільтрації рідини та термоосмотичні явища в ґрунті [13].

Сформульована вище фізична постановка задачі описується крайовою задачею для системи двох квазілінійних параболічних рівнянь і містить наступні залежності:

1) Рівняння фільтраційної консолідації для змінної температури з урахуванням термоосмосу

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1+e}{\gamma a} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(h,T) \frac{\partial h}{\partial x} + \mu(h) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad t > 0;$$

де

$h(x,t)$ – напір в поровій рідині;

$T(x,t)$ – температура;

$k(x,t)$ – коефіцієнт фільтрації, що залежить від тиску та температури;

$\mu(h)$ – термоосмотичний коефіцієнт;

e – коефіцієнт пористості ґрунту;

γ – питома вага порової рідини;

a – коефіцієнт стискуваності ґрунту.

2) Граничні умови для напору на лівій межі:

$$h(x,t)|_{x=0} = h_0(t), \quad t \geq 0; \quad (2)$$

на правій межі:

$$u(x,t)|_{x=l} = \left(-k(h,t) \frac{\partial h}{\partial x} - \mu(h) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

3) Початкова умова для напору

$$h(x,0) = h_0(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \quad (4)$$

4) Рівняння теплопровідності

$$c_s(h) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(h) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho_w c_w u(h,t) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (5)$$

$$x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad t > 0;$$

де

$c_s(h)$ – об'ємна теплоємність ґрунту;

$\lambda(h)$ – коефіцієнт теплопровідності, що залежить від напору.

5) Граничні умови для температури на лівій межі:

$$T(x,t)|_{x=0} = T_0(t), \quad t \geq 0; \quad (6)$$

на правій межі:

$$q_T(x,t)|_{x=l} = \lambda(h) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0; \quad (7)$$

6) Початкова умова для температури

$$T(x,0) = T_0(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \quad (8)$$

7) Умови спряження на тонкому включенні (геобар'єрі) для напору:

$$u^\pm \Big|_{x=\xi} = - \frac{[h]}{d \int_0^d \frac{dx}{k_\sigma(h,T)}}; \quad (9)$$

для температури:

$$q_T^\pm \Big|_{x=\xi} = - \frac{[T]}{d \int_0^d \frac{dx}{\lambda_\sigma(h)}}; \quad (10)$$

де $[h]$, $[T]$ – стрибки напору та температури на межі включення;

$k_\sigma(h,T)$, $\lambda_\sigma(h)$ – коефіцієнти фільтрації та теплопровідності на геобар'єрі;

d – товщина геобар'єру.

Питання якісної теорії задач подібного типу розглянуті, наприклад, в роботі [12].

III. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В НЕЛІНІЙНИХ НЕІЗОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ ФІЛЬТРАЦІЇ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ

Для розробки програми використана мова програмування Python так, як вона має певні переваги над іншими, а саме:

1. Простота використання: легкий для вивчення синтаксис, що дозволяє швидко розробляти програми. Python також має вбудовану документацію та допомогу, що допомагає вирішувати проблеми.
2. Розширюваність: Python має велику кількість сторонніх бібліотек та фреймворків, що дозволяє швидко створювати програми з багатою функціональністю.
3. Кросплатформність: Python підтримується на багатьох платформах, включаючи Windows, macOS, Linux, Android та iOS, що дозволяє розробляти крос-платформні додатки.
4. Велика спільнота: Python має велику та активну спільноту програмістів, яка надає безкоштовну допомогу та ресурси для вивчення мови та розробки програм.
5. Швидкість розробки: дозволяє швидко розробляти програми та зосереджуватися на функціональності програми, замість зайнятості технічними деталями.

6. Простота інтеграції: можливість легко інтегруватися з іншими мовами програмування та зовнішніми додатками.

Також для графічного інтерфейсу використано фреймворк QT, переваги якого полягають в наступному:

1. Підтримка крос-платформної розробки: QT підтримується на різних платформах, включаючи Windows, macOS, Linux, Android та iOS, що дозволяє створювати крос-платформні додатки на Python.
2. Функціональність: має велику кількість готових компонентів, які дозволяють швидко створювати складні інтерфейси користувача. QT також має вбудовану підтримку віджетів, графіки, мультимедіа та мережевого програмування.
3. Зручність використання: дружній та легкий для вивчення API, що дозволяє програмістам швидко розробляти програми. QT також має велику документацію та підтримку спільноти, що допомагає розробникам вирішувати проблеми.
4. Широкі можливості налаштувань: має велику кількість параметрів, які дозволяють розробникам налаштувати різні елементи інтерфейсу користувача, включаючи кольори, шрифти та розміри.

Перед реалізацію потрібно було визначитися з IDE, де можна розробляти такий проєкт. Проаналізувавши найпопулярніші середовища розробки, було обрано Visual Studio Code, тому що він:

- безкоштовний для завантаження та використання, і має відкритий код. Це означає, що можна редагувати та змінювати код редактора, що дозволяє налаштувати його під свої потреби;
- інтегрований з Git та іншими інструментами, тобто Visual Studio Code має інтеграцію з Git, що дозволяє розробникам керувати версіями свого коду та співпрацювати з іншими розробниками;
- забезпечує функціональність та продуктивність, тобто Visual Studio Code має широкий набір функцій та інструментів, які допомагають розробникам писати код швидше та ефективніше. Наприклад, редактор має функцію автодоповнення, підказки, відладчик та багато іншого, що дозволяє писати якісний код за значно менший час.

Числові розв'язки крайової задачі (1)-(10) знайдено методом скінчених елементів (МСЕ). Основи його застосування до задач розглянутого типу описано в роботах [5, 14, 15]. Однак, розвиваються і альтернативні методи розв'язування подібних крайових задач [16, 17].

IV. ВИСНОВКИ

У роботі було досліджено процеси нелінійної неізотермічної фільтрації рідини в пористому середовищі з умовами спряження на тонкому

включенні (геобар'єри). Модель базується на рівняннях консолідації та теплоперенесення, що дозволило детально описати зміни напорів, теплового режиму в ґрунтовому масиві під впливом зовнішніх факторів.

Числові розв'язки відповідної нелінійної крайової задачі реалізовані за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). Це дозволило знайти розв'язки, які мають розрив на тонкому включенні. Програмна реалізація на мові Python з використанням бібліотек NumPy та SciPy дозволила ефективно виконувати чисельні розрахунки і візуалізувати результати змін основних фізичних параметрів у часі та просторі.

Результати моделювання показали, що наявність геобар'єра суттєво впливає на розподіл напорів та температури, створюючи різкі зміни цих параметрів на межі бар'єру. Це підтверджує важливість використання геобар'єрів у системах захисту підземних вод, зокрема на полігонах твердих побутових відходів. Однак, урахування неізотермічних умов зменшує вплив порогового градієнта напорів матеріалу геобар'єра. Як результат – процес фільтрації через бар'єр прискорюються і, відповідно, нівелюються його властивості як захисного елемента від поширення забруднень в ґрунти та ґрунтові води. Тому при проектуванні захисних споруд із тонкими включеннями в їх основах важливо враховувати можливу неізотермічність умов.

Надалі основним напрямком вдосконалення моделі буде дослідження впливу неізотермічних умов на властивості пористого середовища, а також використання більш складних граничних умов для урахування динамічних змін зовнішніх факторів. Програмну реалізацію також планується покращити шляхом оптимізації алгоритмів та розширення функціональності для моделювання більш складних геометричних областей.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ulianchuk-Martyniuk O.V., Michuta O.R., “Numerical simulation of the effect of chemical osmosis on the value of the jumps of pollution in the geochemical barrier,” *International Journal of Applied Mathematics*, 2020, pp. 1067–1082.
- [2] Martyniuk P.M., Ulianchuk-Martyniuk O.V., “Model of non-isothermal consolidation in the presence of geobarriers and the total approximation properties of its finite element solutions,” *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*, vol. 31, No. 1, 2023, pp. 74–94.
- [3] P. Martyniuk, O. Ulianchuk-Martyniuk, V. Herus, O. Pryshchepa, “Integral conjugation conditions for a discontinuous filtration flow via a geobarrier in the case of its biocolmatation,” *International Journal of Applied Mathematics*, vol. 37(1), 2024, pp. 21–28.
- [4] Martyniuk P. M., Michuta O. R., Ulianchuk-Martyniuk O. V., “Numerical modeling of surface subsidence due to compaction of soil with fine inclusions,” *Mathematical Modeling and Computing*, vol. 11(1), 2024, pp. 50–58.
- [5] Michuta Olha R., Martyniuk Petro M., “Nonlinear evolutionary problem of filtration consolidation with the non-classical conjugation condition,” *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*, vol. 30(1), 2022, pp. 71–87.
- [6] O. V. Ulianchuk-Martyniuk, O. R. Michuta, N. V. Ivanchuk, “Finite element analysis of the diffusion model of the bioclogging of the geobarrier,” *Eurasian Journal Of Mathematical and Computer Applications*, vol. 9(4), 2021, pp. 100 – 114.
- [7] Ulyanchuk-Martyniuk O., Michuta, O., Ivanchuk N., “Biocolmatation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier,” *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(10-106), 2020, pp. 18–26.
- [8] Ulianchuk-Martyniuk O., Michuta O., “Conjugation conditions in the problem of filtering chemical solutions in the case of structural changes to the material and chemical suffusion in the geobarrier,” *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 19(1), 2020, pp. 141–154.
- [9] Kumar G., Reddy K.R., McDougall J., “Numerical modeling of coupled biochemical and thermal behavior of municipal solid waste in landfills,” *Computers and Geotechnics*, vol. 128, 2020, 103836.
- [10] Shengwei Wang, Qiang Wang, Bangbang Lu, Wei Zhu, “Thermal effects of the hydraulic conductivity and threshold gradient of sand-clay liners in municipal solid waste landfills,” *Waste Management*, vol. 154, 2022, pp. 217–222.
- [11] Yuntian Teng, Yifeng Wang, Zihao Li, Rui Qiao, Cheng Chen, “Temperature effect on non-Darcian flow in low-permeability porous media,” *Journal of Hydrology*, vol. 616, 2023, 128780.
- [12] Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., “The generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin low-permeable inclusions,” *Cybernetics and Systems Analysis*, vol.39, 2003, pp.737–745.
- [13] Zhu B., Ye Z., Wang L., Xu W., Kong D., Nagel T., Kolditz O., Chen Y., “Theoretical investigation into thermo-osmosis and thermofiltration effects on hydromechanical behavior of saturated soils,” *Journal of Engineering Mechanics*, 2021, 04021005.
- [14] Michuta O., Ivanchuk N., Martyniuk P., Ostapchuk O., “A finite-element study of elastic filtration in soils with thin inclusions,” *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5(5-107), 2020, pp. 41–48.
- [15] Herus V.A., Ivanchuk N.V., Martyniuk P.M., “A system approach to mathematical and computer modeling of geomigration processes using freefem++ and parallelization of computations,” *Cybernetics and Systems Analysis*, vol.54(2) 2018, pp. 284–294.
- [16] Bomba A., Boichura M., Sydorhuk B., “Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems,” *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5(4 (107), 2020, pp. 45–54.
- [17] Bomba A. Ya., Kuzlo M. T., Michuta O. R., Boichura M. V., “On a method of image reconstruction of anisotropic media using applied quasipotential tomographic data,” *Mathematical Modeling and Computing*, vol. 6 (2), 2019, pp. 211–219.