

# Модифікація задачі Д. Гільберта при моделюванні процесів повільного руху рідин з перетоками

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.086>

Андрій Бомба

Національний університет водного господарства та природокористування  
Рівне, Україна  
abomba@ukr.net

Олекса Кушнір

Національний університет водного господарства та природокористування Рівне, Україна  
ol.o.kushnir@nuwm.edu.ua

**Анотація** – Дослідження присвячено узагальненню числового методу комплексного аналізу моделювання процесів повільного руху води в водоймах, обмежених лініями втоку, витоку та береговими непроникними лініями. При цьому розглядаються різні варіанти формування течії в залежності від величин керуючих параметрів (граничних потенціалів, витрат тощо).

**Ключові слова** – математичне моделювання; повільний рух води; метод комплексного аналізу.

## 1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Ще на початку минулого століття такі вчені, як Давид Гільберт (див., напр., [1]-[3]) ставили та розв'язували задачі про знаходження в деякій області  $G_z$  аналітичної функції (комплексного потенціалу)  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , де  $\varphi = \varphi(x, y)$ ,  $\psi = \psi(x, y)$  – відповідно потенціал, та функція течії, на ділянках границі якої по чергово задавалися дійсна та уявна частини ( $\varphi(x, y)|_{A_i B_i} = \varphi_{*i}(M)$ ,  $\psi(x, y)|_{B_i A_{i+1}} = \psi_{*i}(M)$ , де  $M$  - біжуча точка відповідної ділянки). У випадку, якщо  $\varphi_{*i}$ ,  $\psi_{*i}$  – константи, то відповідна область комплексного потенціалу  $G_\omega$  буде внутрішністю многокутника з горизонтальними та вертикальними ребрами. Якщо  $G_z$  є верхньою півплощиною (див. рис. 1), а  $\varphi_{*i}$  та  $\psi_{*i}$  на відповідних ділянках дійсної осі «зв'язані лінійно» (при цьому область  $G_\omega$  буде внутрішністю довільного многокутника), то задача на знаходження такої функції зводиться до конформного відображення даної півплощини на такий многокутник, за допомогою формул Кристоффеля-Шварца.

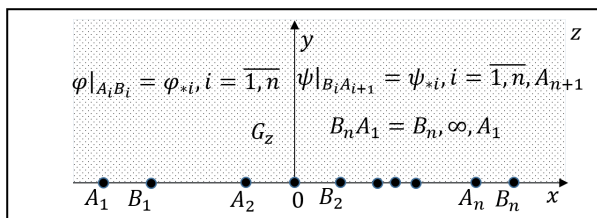


Рис. 1. Область  $G_z = \{z = x + iy, y > 0, -\infty < x < +\infty\}$

У роботах [4]-[11] розглядалися подібні задачі в областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Їх розв'язки зводились до числових методів конформних та квазіконформних відображень даних областей на відповідні області комплексних потенціалів. На відміну від [1]-[3], в даних роботах розглядалися проблеми формування ідеальної течії в залежності від параметрів, що задають крайові умови. Зокрема, в роботі [10] описано деякі із характерних випадків формування ідеальної течії в залежності від заданих значень керуючого потенціалу. На основі модифікації методу сумарних зображень Г. Положого отримано характеристичну функцію течії, наводяться приклади побудови динамічної сітки, поля швидкості, приклади формування різних перетоків. При цьому виділені типи задач (ключових) для знаходження таких значень керуючого потенціалу, які оптимізують конкретні функціонали, наводиться приклад розв'язку однієї із них. А в [11] методологію моделювання процесів повільного руху рідин у водоймах, що ґрунтується на інтерпретації реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним (типу фільтраційного) полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень, узагальнено на випадки збільшення кількості джерел збурення вихідної течії. Якщо природна течія не є близькою до ідеальної, то у низці випадків одержані розв'язки можуть використовуватися в якості нульового наближення шуканого поля (комплексного квазіпотенціалу, швидкості тощо). Запропонований підхід дає можливість відшукування ліній розділу основного та додаткового потоків, враховує фізичні аспекти процесу руху водяних мас, зокрема описаний вище фіктивний коефіцієнт провідності забезпечує близькість величини швидкості до нуля поблизу берегових ліній. При цьому забезпечується можливість задання окремих ділянок берегових ліній масивами точок (з подальшою інтерполяцією межі області деякими сплайнами, що є актуальним для реальних об'єктів із сильною хвилястістю їх меж). Особливістю розробленого алгоритму є можливість зупинки процедури обчислень при виконанні лише деяких із умов закінчення процесу з автоматичним визначенням тих ділянок фізичної

області фільтрації, де мають місце похибки більшій заданої точності наближень відносно інших умов, що дає змогу економніше використовувати машинний час. Це є актуальним, зокрема, у зв'язку із виявленням так званих «застійних зон» та «зон великих градієнтів», що виникають поблизу особливих точок негладких берегових ліній. Також у алгоритмі передбачено можливість зміни місця положення ділянки збурення потоку.

В даному ж дослідженні ставиться задача узагальнення запропонованої методології на випадки збільшення кількості граничних еквіпотенціалей, врахування різних додаткових факторів. А саме, моделювання процесів повільного руху води в деякій водоймі, обмеженій лініями втоку, витоків та береговими непроникними лініями. При цьому вважається, що глибина водойми є сталою, течія є відносно повільною, відсутні підземні джерела, не враховуємо вплив вітру тощо. Характеристику втоків та витоків характеризуємо відповідними значеннями потенціалів (що виражаються через висоти, напори, тиски), та витрат.

## II. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

Розглядається фізична область  $G_z$  комплексної площини  $z$ , де  $z = x + iy$  (див. рис. 2),  $A_i, B_i$  ( $i = \overline{1, n}$ )

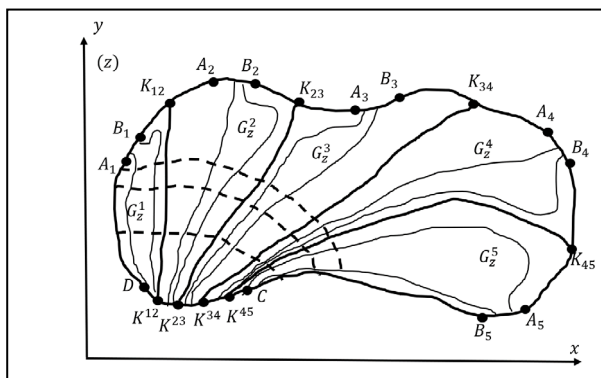


Рис. 2. Фізична область  $G_z$

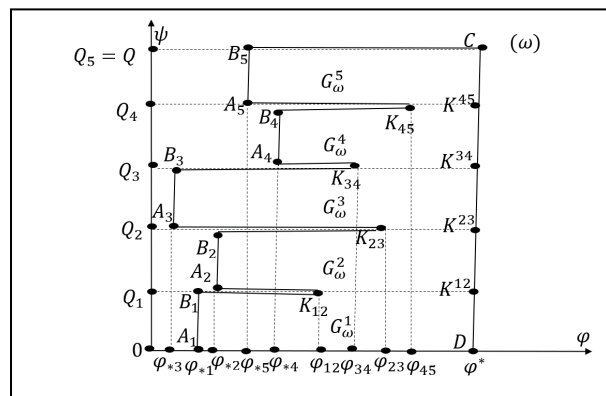
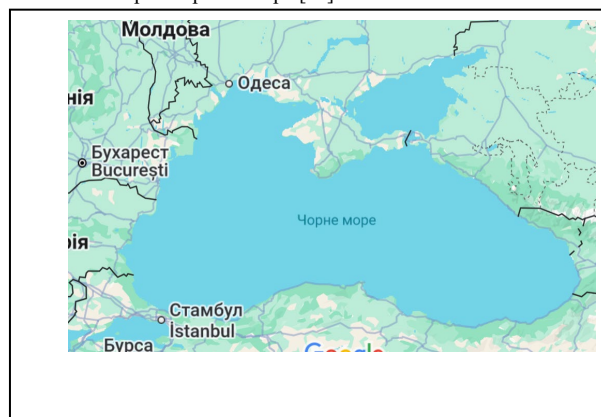


Рис. 3. Область комплексного потенціалу

– ділянки «втоку» (через  $\varphi_{*i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  позначено відповідні потенціали),  $\overline{CD}$  – ділянка витоків,  $K_{i,i+1}$ ,  $K_{i+1,i}$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ) – відповідно початкові та кінцеві точки лінії розділу течії (позначено жирними лініями). Відповідну область комплексного потенціалу зображено на рис. 3, де через  $Q_1$ ,

$Q_2 = Q_1 + Q_{12}, \dots, Q_n$  ( $n = 5$ ) позначені величини відповідних перетоків. Задача (пряма) полягає в знаходженні в  $G_z$  розв'язку системи Коші-Рімана:  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ , за відповідних граничних умов, і зводиться до конформного відображення області  $G_z$  на  $G_\omega$  з відповідністю кутових точок. А остання задача, в свою чергу, зводиться до оберненого конформного відображення (знаходження характеристичної функції течії  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ ) області  $G_\omega$  на  $G_z$ .

Рис. 4. Карта Чорного моря [12]



В перспективі є застосування запропонованої методології до розрахунку гідродинамічної сітки у Чорному морі при умові, що відповідна течія є стаціонарною та ідеальною (див рис. 4).

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] Lavrent'ev, M.A. and Shabat, B.V. Methods of Complex Variable Theory. - M. Nauka, 1973.
- [2] Gurvits A., Kurant R. The theory of functions. - M.: Nauka, 1968.
- [3] Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V., Problems of hydrodynamics and their mathematical Models, - M. Nauka, 1977.
- [4] Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопєцький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
- [5] Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Ярошак С.В. Методи комплексного аналізу. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
- [6] Бомба А.Я., Сінчук А.М., Ярошак С.В. Моделювання фільтраційних процесів у нафтогазових пластах числовими методами квазіконформних відображень. – Рівне: «Асоль», 2016. – 238 с.
- [7] Бомба А.Я., Гладка О.М., Кузьменко А.П. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень. – Рівне: «Асоль», 2016. – 283 с.
- [8] Бомба А.Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації. – Рівне: НУВГП, 2020. – 201 с.
- [9] Бомба А. Я., Каштан С. С., Кушнір О. О. Методи комплексного аналізу моделювання глобальних процесів руху поверхневих та підземних вод. - XI Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (м.Львів, 24-26 вересня 2024р.). Львів: ІППММ, 2024. -2с.
- [10] Bomba A.Ya., Kashtan S. S., Skopetski V.V. Nonlinear Inverse Boundary - Value Problems of Conformal Mapping with a Controlling Potential Cybernetics and Systems Analysis. - 2004. - Vol. 40, №1. - P.58-65.
- [11] Бомба А. Я., Бойчура М. В., Савюк С. В. Числові методи квазіконформних відображень моделювання повільного руху рідини у водоймах. - Вісник НУВГП. – №2(74) – 2016. – С.92-106.