MCIT Modeling, control & information technologies

Умови розв’язності для зв'язаної системи нелінійних операторних рівнянь Сільвестра у гільбертовому просторі

https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.095

Олександр Покутний
Інститут математики НАН України
м. Київ, Україна
alex_poker@imath.kiev.ua

Євген Панасенко
Запорізький національний університет
м. Запоріжжя, Україна
panasenko.yevgeniy@gmail.com

***Анотація* – Розглянуто зв'язану систему нелінійних операторних рівнянь Сільвестра в гільбертовому просторі. Встановлено необхідну та достатню умови розв'язності для зв'язаної нелінійної операторної системи у критичному випадку.**

***Ключові слова* – зв'язана система; гільбертовий простір; нелінійна система; оператоне рівняння типу Ляпунова; псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор.**

I. Вступ

Так як і рівняння Сільвестра зв'язані системи лінійних операторних рівнянь Сільвестра мають практичні застосування, зокрема, у задачах керування [1, 9].

Задача знаходження розв'язків нелінійних рівнянь, а особливо нелінійних систем, є однією з найважливіших задач математики. Як відомо [1], матричні рівняння Сільвестра виражають класичні методи дослідження неперервних та дискретних систем, які успішно застосовуються у задачах аналізу стійкості руху, а також мають застосування у задачах проектування [9] та задачах про топологічну ентропію нелінійних систем [6], та комутованих нелінійних систем [10], які досліджувалися Д. Ліберзоном та Г. Янгом. Системи нелінійних рівнянь не мають прямих методів розв'язання у загальному випадку. Тому, основною проблемою при розв'язанні нелінійних систем операторних рівнянь є визначення умов розв'язності та побудові збіжного ітераційного процесу знаходження розв'язку. Крім того, такі задачі знаходять застосування при моделюванні нейронних мереж Гопфілда [5].

II. Основна частина

A. Постановка задачі

Розглянуто зв'язану систему нелінійних операторних рівнянь Сільвестра:

$$\begin{cases} A_{11}X_1(\varepsilon) + X_1(\varepsilon)B_{11} + \varepsilon R_1(X_2, X_3, \dots, X_n) = H_1, \\ A_{22}X_2(\varepsilon) + X_2(\varepsilon)B_{22} + \varepsilon R_2(X_1, X_3, \dots, X_n) = H_2, \\ \quad\dots\dots\dots \\ A_{nn}X_n(\varepsilon) + X_n(\varepsilon)B_{nn} + \varepsilon R_n(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = H_n. \end{cases} \quad (1)$$

У системі (1) A_{ii}, B_{ii}, $H_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — лінійні та обмежені оператори, $\mathcal{H}$ – гільбертів простір. $R_i\big(X_1(\varepsilon), X_2(\varepsilon), \dots, X_{i-1}(\varepsilon), X_{i-1}(\varepsilon), \dots, X_n(\varepsilon)\big)$ — нелінійна за змінними $X_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$ оператор-функція.

Задача полягає у тому, щоб знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків операторної системи (1) за умови, що породжуюча система, коли $\varepsilon = 0$, має розв'язки і відповідні розв'язки $X_i(\varepsilon)$, при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків X_i^0 породжуючої задачі:

$$A_{ii}X_i^0 + X_i^0 B_{ii} = H_i, \ \ i = \overline{1,n}. \quad (2)$$

B. Лінійна задача

При $\varepsilon = 0$ отримаємо породжуючу задачу (2), яку можна записати в операторній формі, у припущенні, що оператори L_i, $i = \overline{1,n}$ є нормально-розв'язними $\big(R(L_i) = \overline{R(L_i)}\big)$ [4]:

$$\begin{cases} L_1X_1^0 = A_{11}X_1^0 + X_1^0 B_{11} = H_1, \\ L_2X_2^0 = A_{22}X_2^0 + X_2^0 B_{22} = H_2, \\ \quad\dots\dots\dots \\ L_nX_n^0 = A_{nn}X_n^0 + X_n^0 B_{nn} = H_n. \end{cases} \quad (3)$$

Необхідна та достатня умова розв'язності системи (3) є такою [4]:

$$P_{N(L_i^*)}H_i = 0, \ \ i = \overline{1,n}. \quad (4)$$

Тут $P_{N(L_n)} = I - L_n^+ L_n$ й $P_{N(L_n^*)} = I - L_n L_n^+$ є операторами проектування, які проектують гільбертовий простір $\mathcal{H}$ на ядро $N(L_n)$ та коядро $N(L_n^*)$ оператора L_n відповідно; L_n^+ є псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор [4].

За виконання умови (4) розв'язок системи має такий вигляд:

$$\begin{cases} X_1^0 = L_1^+ H_1 + P_{N(L_1)} C_1^0, \\ X_2^0 = L_2^+ H_2 + P_{N(L_2)} C_2^0, \\ \quad\dots\dots\dots \\ X_n^0 = L_n^+ H_n + P_{N(L_n)} C_n^0, \end{cases} \quad (5)$$

де C_i^0, $i = \overline{1,n}$ – лінійні та обмежені оператори.

III. НЕЛІНІЙНА ЗАДАЧА

A. Необхідна умова

Знайдено необхідну умову існування розв'язку $X_i(\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, які при $\varepsilon=0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $X_i^0(\varepsilon)$ вигляду (5).

Якщо зв'язана система лінійних операторних рівнянь Сільвестра (2) має розв'язок, то повинні виконуватися умови розв'язності:

$$\begin{cases} P_{N(L_1^*)}\left[H_1-\varepsilon R_1\left(X_2(\varepsilon),X_3(\varepsilon),\dots,X_n(\varepsilon)\right)\right]=0, \\ P_{N(L_2^*)}\left[H_2-\varepsilon R_2\left(X_1(\varepsilon),X_3(\varepsilon),\dots,X_n(\varepsilon)\right)\right]=0, \\ \dots\dots\dots \\ P_{N(L_n^*)}\left[H_n-\varepsilon R_n\left(X_1(\varepsilon),X_2(\varepsilon),\dots,X_{n-1}(\varepsilon)\right)\right]=0. \end{cases}$$

При $\varepsilon\neq 0$, враховуючи умови розв'язності (4) і неперервність по ε функцій $X_i(\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, перейдемо до границі при $\varepsilon\to 0$, $X_i(\varepsilon)\to X_i^0(C_i^0)$, отримаємо систему

$$\begin{cases} P_{N(L_1^*)}R_1\left(\dots,L_n^+H_n+P_{N(L_n)}C_n^0\right)=0, \\ P_{N(L_2^*)}R_2\left(\dots,L_n^+H_n+P_{N(L_n)}C_n^0\right)=0, \\ \dots\dots\dots \\ P_{N(L_n^*)}R_n\left(\dots,L_{n-1}^+H_{n-1}+P_{N(L_{n-1})}C_{n-1}^0\right)=0. \end{cases} \qquad (6)$$

Якщо система (6) має розв'язок, тоді елементи C_i^0, $i=\overline{1,n}$ обумовлюють ті породжуючі розв'язки $X_i(\varepsilon)\in C[0;\varepsilon_0]$, $X_i(0)=X_i^0(C_i^0)$ системи (1). Якщо система (6) немає дійсних розв'язків, то система (1) немає шуканого розв'язку.

Таким чином, доведено необхідну умову існування розв'язків зв'язаної системи нелінійних операторних рівнянь Сільвестра.

Теорема (необхідна умова). Нехай виконана умова розв'язності (4) породжуючої задачі (2) і задача (1) представляє собою критичний випадок: $P_{N(L_i^*)}\neq 0$, $i=\overline{1,n}$ і має розв'язок $X_i(\varepsilon)$, який перетворюється при $\varepsilon=0$ на один з розв'язків X_i^0 лінійної породжуючої системи (3) з операторами $C_i=C_i^0\in\mathcal{H}$, $i=\overline{1,n}$. Тоді, ці оператори задовольняють нелінійну операторну систему (6) для породжуючих операторів.

B. Достатня умова

Зробивши у системі (1) заміну змінних

$$X_i(\varepsilon)=X_i^0(C_i^0)+Y_i(\varepsilon) \qquad (7)$$

можна визначити умови існування і побудувати розв'язок $Y_i(\varepsilon)\in C[0;\varepsilon_0]$, $i=\overline{1,n}$. Тоді

$$\begin{cases} A_{11}X_1^0(C_1^0)+X_1^0(C_1^0)B_{11}+A_{11}Y_1(\varepsilon)+Y_1(\varepsilon)B_{11}+ \\ +\varepsilon R_1\left(X_2^0(C_2^0)+Y_2(\varepsilon),\dots,X_n^0(C_n^0)+Y_n(\varepsilon)\right)=H_1, \\ A_{22}X_2^0(C_2^0)+X_2^0(C_2^0)B_{22}+A_{22}Y_2(\varepsilon)+Y_2(\varepsilon)B_{22}+ \\ +\varepsilon R_2\left(X_1^0(C_1^0)+Y_1(\varepsilon),\dots,X_n^0(C_n^0)+Y_n(\varepsilon)\right)=H_2, \\ \dots\dots\dots \\ A_{nn}X_n^0(C_n^0)+X_n^0(C_n^0)B_{nn}+A_{nn}Y_n(\varepsilon)+Y_n(\varepsilon)B_{nn}+ \\ +\varepsilon R_n\left(X_n^0+Y_n(\varepsilon),\dots,X_{n-1}^0(C_{n-1}^0)+Y_{n-1}(\varepsilon)\right)=H_n. \end{cases} \qquad (8)$$

Виділивши в оператор-функціях $R_i\left(X_1(\varepsilon),X_2(\varepsilon),\dots,X_{i-1}(\varepsilon),X_{i+1}(\varepsilon),\dots,X_n(\varepsilon)\right)$ лінійну частину по Y_i і члени нульового порядку по ε, а також враховуючи, що $X_i^0(C_i^0)$ є розв'язком системи (3) і елементи C_i^0 задовольняють систему (6) та заміну змінних (7), отримаємо такі умови розв'язності:

$$P_{N(L_i^*)}\Big[R_i\left(Y_1(\varepsilon),\dots,Y_{i-1}(\varepsilon),Y_{i+1}(\varepsilon),\dots,Y_n(\varepsilon)\right)+ \\ +\sum_{j=1,j\neq i}^{n}R'_{ij}\left(X_1^0(C_1^0,\dots)\right. \\ \left.\dots,X_{i-1}^0(C_{i-1}^0),X_{i+1}^0(C_{i+1}^0),\dots,X_n^0(C_n^0)\right)Y_i(\varepsilon)\Big]=0.$$

Ввіши оператор

$$B_{0_{ij}}= \\ =P_{N(L_i^*)}\Big[R_i\left(Y_1(\varepsilon),\dots,Y_{i-1}(\varepsilon),Y_{i+1}(\varepsilon),\dots,Y_n(\varepsilon)\right)+ \\ +\sum_{j=1,j\neq i}^{n}R'_{ij}\left(X_1^0(C_1^0,\dots)\right. \\ \left.\dots,X_{i-1}^0(C_{i-1}^0),X_{i+1}^0(C_{i+1}^0),\dots,X_n^0(C_n^0)\right)P_{N(L_j)}\Big],$$

отримаємо операторне рівняння

$$B_0C_j=F_0, \qquad (9)$$

де операторна матриця $B_0=B_{0_{ij}}$ має вигляд:

$$B_{0_{ij}}=\begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & 0 & B_{23} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & B_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Надалі для простоти будемо розглядати випадок, коли оператор B_0 є нормально-розв'язними $\left(R(L_i)=\overline{R(L_i)}\right)$ [4]. Тоді, достатньою умовою розв'язності рівняння (9) буде наступна умова:

$$P_{N(B_0^*)}\begin{bmatrix} P_{N(L_1^*)} \\ P_{N(L_2^*)} \\ \vdots \\ P_{N(L_n^*)} \end{bmatrix}=0. \qquad (11)$$

За умови (11) один з розв'язків операторного рівняння (9) буде мати вигляд:

$$C_j=B_0^+F_0, \qquad (12)$$

а вектор F_0:

$$F_0= \\ \begin{pmatrix} -P_{N(L_1^*)}\left[R_1\left(Y_2(\varepsilon),\dots,Y_n(\varepsilon)\right)+\sum_{j=2}^{n}R'_{1j}\,\overline{Y}_1(\varepsilon)\right] \\ -P_{N(L_2^*)}\left[R_2\left(Y_1(\varepsilon),\dots,Y_n(\varepsilon)\right)+\sum_{j=1,j\neq 2}^{n}R'_{2j}\,\overline{Y}_2(\varepsilon)\right] \\ \vdots \\ -P_{N(L_n^*)}\left[R_n\left(Y_1(\varepsilon),\dots,Y_{n-1}(\varepsilon)\right)+\sum_{j=1,j\neq n}^{n}R'_{nj}\,\overline{Y}_n(\varepsilon)\right] \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес та використовуючи відомі методи [4], отримаємо достатню умову розв'язності зв'язаної системи нелінійних операторних рівнянь Сільвестра (1).

Теорема (достатня умова). Нехай породжуюча система (3) при умові (4) має розв'язок вигляду (5) і система (3) представляє собою критичний випадок: $P_{N(L_i^*)} \neq 0, i = \overline{1,n}$, і нехай оператор B_0 задовольняє умови:

1) B_0 — нормально-розв'язний оператор;

2) виконується умова (11).

Тоді, для будь-яких елементів C_i^0 , $i = \overline{1,n}$, які задовольняють нелінійну операторну систему для породжуючих операторів (6), система (8) має хоча б один розв'язок $Y_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0; \varepsilon_0]$ ітераційного процесу:

$$\overline{Y}_i^{k+1}(\varepsilon) = -\varepsilon L_i^+[\varphi_i(C_1^0, \dots, C_{i-1}^0, C_{i+1}^0, \dots, C_n^0) +$$
$$+R_i\big(Y_1(\varepsilon), \dots, Y_{i-1}(\varepsilon), Y_{i+1}(\varepsilon), \dots, Y_n(\varepsilon)\big) +$$
$$+ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} R'_{ij}\,(X_1^0(C_1^0, \dots)$$
$$\dots, X_{i-1}^0(C_{i-1}^0), X_{i+1}^0(C_{i+1}^0), \dots, X_n^0(C_n^0)\Big) Y_j^k(\varepsilon)\Big];$$

$$\begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \\ \vdots \\ C_k^0 \end{pmatrix} = B_0^+ \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -P_{N(L_1^*)}\left[R_1\big(Y_2(\varepsilon), \dots, Y_n(\varepsilon)\big) + \sum_{j=2}^{n} R'_{1j}\,\overline{Y}_1^k(\varepsilon)\right] \\ -P_{N(L_2^*)}\left[R_2\big(Y_1(\varepsilon), \dots, Y_n(\varepsilon)\big) + \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} R'_{2j}\,\overline{Y}_2^k(\varepsilon)\right] \\ \vdots \\ -P_{N(L_n^*)}\left[R_n\big(Y_1(\varepsilon), \dots, Y_{n-1}(\varepsilon)\big) + \sum_{j=1, j\neq n}^{n} R'_{nj}\,\overline{Y}_n^k(\varepsilon)\right] \end{pmatrix};$$

$$Y_i^{k+1} = \overline{Y}_i^{k+1}(\varepsilon) + P_{N(L_i)} C_i^k,$$
$$C_i^k \in \mathcal{H},\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{0,\infty}.$$

IV. Висновки

У роботі запропоновано підхід для побудови розв'язку зв'язаної системи нелінійних операторних рівнянь Сільвестра в гільбертовому просторі у критичному випадку: $P_{N(L_i^*)} \neq 0, i = \overline{1,n}$. Доведено, що розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на відрізку $[0; \varepsilon_0]$ ітераційного процесу.

Література

[1] О. Г. Мазко, “Матричні методи аналізу та синтезу динамічних систем,” Київ: Наукова думка, 2023. 321 с.

[2] О. Бойчук, Є. Панасенко and О. Покутний, “Крайові задачі для рівняння Ляпунова. I.,” Український математичний журнал, 2024, Vol. 76, No. 3, сс. 353–372.

[3] О. Бойчук, Є. Панасенко and О. Покутний, “Крайові задачі для рівняння Ляпунова. II.,” Український математичний журнал, 2024, Vol. 76, No. 5, сс. 680–694.

[4] О. Бойчук and О. Покутний, “Нормально-розв’язні крайові задачі для операторно-диференціальних рівнянь,” Київ: Наукова думка, 2022. 221 с.

[5] O. Boichuk, D. Bihun, V. Feruk and O. Pokutnyi, “Minimizing of the quadratic functional on Hopfield networks,” Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2021, No. 92, pp. 1–20.

[6] D. Liberzon, “On Topological Entropy of Interconnected Nonlinear Systems,” IEEE Control Systems Letters, 2021, Vol. 5, No 6, pp. 2210–2214.

[7] E. Panasenko and O. Pokutnyi, “Bifurcation Conditions for the Solutions of the Lyapunov Equation in a Hilbert Space,” Journal of Mathematical Sciences, 2019, Vol. 236, No. 3, pp. 313–332.

[8] E. Panasenko and O. Pokutnyi, “Nonlinear Boundary-Value Problems for the Lyapunov Equation in the Space,” Journal of Mathematical Sciences, 2020, Vol. 246, No. 3, pp. 394–409.

[9] A. Vandendorpe and P. Van Dooren, “Model Reduction of Interconnected Systems,” Research Aspects and Applications, 2008, Vol. 13, pp. 305–321.

[10] G. Yang, D. Liberzon and J. Hespanha, “Topological entropy of switched nonlinear and interconnected systems,” arXiv.org (2301.12483 [eess.SY]), 2023, pp. 1–31.

[11] .G Yang and D. Liberzon, “Lyapunov-based small-gain theorem for interconnected switched systems,” Systems And Control Letters, 2015, Vol. 78, pp. 47–54.