Ряди Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом

https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.096

Микола Приймак
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.
м. Тернопіль, Україна.
pmw.ukr@ukr.net

Ключові слова – **періодичні функції із змінним періодом; змінний період; ортогональна система тригонометрична функцій із змінним періодом; ряди Фур'є періодичних функцій із змінним періодом.**

I. Вступ

Крім періодичних сигналів, період яких вважається постійним, в останні роки звернуто увагу на сигнали, які з однієї сторони ведуть себе подібно до періодичних, проте їх період вже не є постійним, а певним чином змінюється. Такими є електрокардіограми, отримані під час чи після дії на організм певного збудника спокою, звук сирени повітряної тривоги тощо. Для періодичних сигналів, моделлю яких є періодичні функції, методи їх дослідження розроблені достатньо різносторонньо [1]. Щодо сигналів із змінним періодом, то для їх вивчення найперше необхідно вибрати їх модель, яка б стала базою розробки методів аналізу вказаних сигналів. Таку модель вперше було запропоновано в [2], в якій був введений клас періодичних функцій із змінним періодом.

2. **Ортогональна система тригонометричних функцій із змінним періодом.**

Наявність функцій із змінним періодом ставить нові проблемні задачі. Найперше – це побудова рядів Фур'є таких функцій. Передумовою для цього є наявність відповідної ортогональної системи функцій із змінним періодом. Вперше така система була побудована в [3], більш різносторонньо система досліджувалася в [4]. Має місце наступна

Теорема. Система тригонометричні функції

$$1, \sin kx^{\alpha}, \cos kx^{\alpha}, \alpha > 0, x \in I, k = 1.2, \cdots \qquad (1)$$

змінний період якої $T(x) = -x + \left(x^{\alpha} + 2\pi\right)^{1/\alpha}$, є ортогональною із ваговою функцією $\rho(x) = \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ на довільному інтервалі

$$\left[x, x + T(x)\right] \qquad (2)$$

при цьому скалярний добуток однакових функцій системи (1) рівний , різних – рівний нулю.

3. **Ряди Фур'є періодичних функцій із змінним періодом.**

Нехай $f(x)$ – періодична функція із змінним періодом $T(x) = -x + (x^{\alpha} + 2\pi)^{1/\alpha}$, ваговою є функція $\rho(x) = (x^{\alpha})' = x^{\alpha-1}$. Коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$ по ортонормованій системі (1) обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x)dx, \quad a_k = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x)\cos kx^{\alpha} dx, \qquad (3)$$

$$b_k = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x)\sin kx^{\alpha} dx.$$

Відповідний ряд Фур'є має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx^{\alpha} + b_k \sin kx^{\alpha}.$$

Якщо

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx^{\alpha} + b_k \sin kx^{\alpha}$$

– скінченна сума ряду Фур'є, то згідно [4] середнє квадратичне відхилення S_n від f визначається за формулою

$$\left\| f(x) - S_n(x) \right\|_{\rho}^{2} = \int_{\tau}^{\tau+T_{\varepsilon}(\tau)} \left(f(x) - S_n(x)\right)^2 \rho_{\alpha}(x)dx.$$

Зауваження. Аналіз формул (1), (2) і (3) показує, що в залежності від параметра α змінюється:

- ✓ ортогональна тригонометрична система функцій (1);
- ✓ інтервал ортогональності (2);
- ✓ вагова функція $\rho(x)$.

4. **Приклади рядів Фур'є функцій із змінним періодом.**

Для побудови скінчених рядів Фур'є функцій із змінним періодом було написано програмне забезпечення. В розглянутих нижче прикладах для знаходження суми S_n параметру n надавалося значення 50.

Приклад 1. Розглянемо функцію

$f(x) = sign\left(sin\, x^{2/3}\right)$, для якої її змінний період $T_{2/3}(x) = -x + \left(x^{2/3} + 2\pi\right)^{3/2}$. Відповідно до виразу функції $f(x)$ ортонормованою є система:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin kx^{2/3}}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx^{2/3}}{\sqrt{\pi}}, k = 1.2, \cdots.$$

Для знаходження коефіцієнтів (3) був вибраний інтервал ортогональності $\left[\tau, \tau + T_{2/3}(\tau)\right]$ при $\tau = 10$. Оскільки

$$T_{2/3}(10) = -10 + \left(10^{2/3} + 2\pi\right)^{3/2} \approx 26.11,$$

то таким є інтервал $\left[10,\ 10 + T_{2/3}(10)\right] = [10;\ 36.11]$. Було знайдено $n = 50$ коефіцієнтів a_k і b_k ряду Фур'є. Графік скінченної суми ряду на проміжку [0,75] показаний на рисунку 1. Із поведінки графіка видно його «розтягування», що відповідає зростанню періода $T_{2/3}(x)$. Спостерігається також, що сума S_{50} досить «добре» відтворює саму функцію $f(x) = sign\left(sin\, x^{2/3}\right)$, зображену пунктирною лінією.

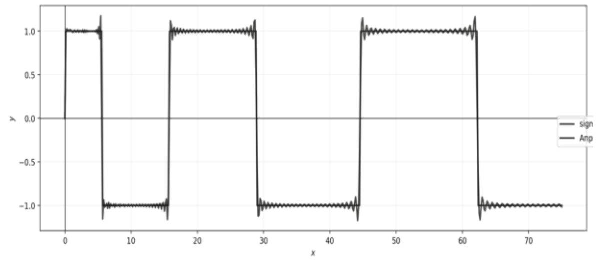

Рисунок 1. Графік скінченної суми ряду Фур'є функції $sign\left(sin\, x^{2/3}\right)$,

Розглянемо ще приклад побудови скінченого ряду Фур'є для функції «дробова частина» числа.

Приклад 2. Нехай $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}$. Змінний період цієї функції $T_{3/5}(x) = -x + \left(x^{3/5} + 1\right)^{5/3}$.

Для знаходження коефіцієнтів ряду вибрано відповідну ортонормовану систему та інтервал інтегрування $[\tau, \tau + T(\tau)]$ при $\tau = 0$. Оскільки $T(0) = -0 + \left(0^{3/5} + 1\right)^{5/3} = 1$, то таким є інтервалом $[0,\ 0 + T(0)] = [0;\ 1]$. Графік скінченної суми S_{50} розміщено на рисунку 2.

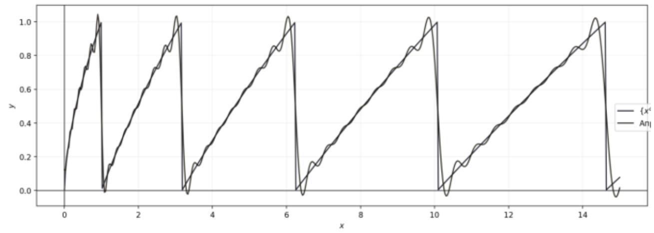

Рисунок 2. Графік скінченної суми ряду Фур'є для функції $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}$.

Висновки.

За основний напрям досліджень періодичних сигналів із змінним періодом вибрано побудову їх рядів Фур'є, що еквівалентно заміні сигналів їх аналітичними функціями, якими є ряди Фур'є, з подальшим дослідженням вже не самих сигналів, а їх рядів. Отримані результати відкривають перспективні напрямки дослідження реальних сигналів із змінним періодом, зокрема електрокардіограм, отриманих під час чи після дії на організм збудника спокою.

Література

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: «Наука», 1976. – 542 с.

[2] Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2. – С. 132-141.

[3] Приймак М.В. Ортогональні системи періодичних функції із змінним періодом // Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007. – С..72.

[4] Приймак М.В. Періодичні функції із змінним періодом та їх ряди Фур'є. Монографія. – Тернопіль: ТОВ Тернограф, 2024. – 136 с.