

Математичне моделювання одного класу підземних і поверхневих гідравлічних процесів

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.087>

Андрій Бомба

Національний університет водного господарства та
природокористування
Рівне, Україна
a.ya.bomba@nuwm.edu.ua

Сергій Каштан

Національний університет водного господарства та
природокористування
Рівне, Україна
s.s.kashtan@nuwm.edu.ua

Анотація — Запропоновано підхід щодо моделювання близької до ідеальної гідравлічної течії у водному об'єкті. Аналіз гідрологічного режиму водойми вказує на взаємодію підземних ґрунтових вод та поверхневих водних мас. Ґрунтові води, що підживлюють (поповнюють), наприклад, озеро пропонується моделювати як ділянки (джерела) «поперечних» збурень «основної» течії. В залежності від значень потенціалів (напорів) на еквіпотенціальних лініях, можливі різні випадки формування кривих розділу потоків водних мас у водоймі (фізичній області), а отже – побудови відповідних областей квазікомплексного потенціалу. Наближений розв'язок крайової задачі із ділянкою збурення на лінії течії отримується за допомогою алгоритму, який ґрунтується на почерговій параметризації величин конформних інваріантів, граничних і внутрішніх вузлів сіткової області з використанням ідей методу блочної ітерації. Запропонований підхід, окрім розрахунку кривих розділу водних мас, забезпечує можливість паралельно знаходити характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал, повну витрату, зміни рівня води, будувати в заданій області гідродинамічну сітку та розрахувати поле швидкості руху

Ключові слова — моделювання, конформні та квазіконформні відображення, обернені задачі, потоки водних мас, ґрунтові води, джерело збурень, керування, числові методи

I. ВСТУП

Фільтраційні та гідравлічні процеси відіграють важливу роль у формуванні гідрологічного режиму водойм, забезпечуючи циркуляцію води та взаємодію поверхневих і підземних водних потоків. Дослідження цих процесів є важливим з точки зору екології, збереження біорізноманіття та управління водними ресурсами. Відповідне математичне моделювання дозволяє проаналізувати характер процесів, які впливають на стан водойми, передбачити їх розвиток у майбутньому, що є важливим при прийнятті управлінських рішень.

В багатьох випадках практики формули на знаходження характеристик середовища потребують задання функції швидкості. В реальних фізичних задачах, зокрема в задачах гідрології, фільтрації, часто це зробити або неможливо, або дуже складно.

Математичне моделювання фільтраційних і гідравлічних процесів є невід'ємною частиною сучасних гідрологічних досліджень водних об'єктів. Тому запропоновано підхід, при якому за відомими значеннями потенціалів (напорів) на кожній із ділянок витoku та втоку рідини в досліджувану область будувється відповідна область квазікомплексного потенціалу.

Це дослідження присвячене розробці підходу стосовно прогнозування динаміки поверхневих і підземних вод та розвитку числових методів комплексного аналізу для розв'язання відповідних модельних задач.

II. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У роботах [1, 2, 3] описано розроблений метод розв'язання обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень) для побудови динамічної сітки потенційних та квазіпотенційних полів, побудови різного роду профілів та поля швидкості із паралельним розрахунком різних характеристик процесу. Тут, під оберненням такого роду задач мається на увазі як перехід від прямих задач до задач на конформне відображення відповідної області комплексного потенціалу на вихідну область, так і той факт, що вони містять невідомі параметри при додаткових відомостях про їх розв'язки.

Методику наближення розв'язків крайових еліптичних задач, також перенесено і на крайові задачі, які зводяться до конформних відображень довільної криволінійної області, обмеженої лініями течії та еквіпотенціальними лініями на область комплексного потенціалу, що має вигляд многокутника, границя якого складається із вертикальних та горизонтальних відрізків, променів, із декількома невідомими при відповідності вершин.

При цьому, розв'язана проблема нелінійного обернення крайових задач на конформні відображення в областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями з потенціалом керування на ділянці однієї із ліній течії. Окрім шуканого потенціалу і функції течії, у результаті побудовано ще й характеристичну функцію, описані усі можливі характерні випадки формування течії в залежності від заданих значень потенціалу

керування, наводяться схеми побудови динамічних сіток, ліній розділу течії, поля швидкості, формування відповідних перетоків. При цьому, виділено типи задач (ключових) на знаходження тих значень потенціалу керування, що забезпечують оптимізацію певних функціоналів (витрат, витоків, втоків, перетоків, ін.) [2, 4, 5].

Нові підходи до моделювання глобальних процесів руху поверхневих і підземних вод представлені у роботах [6, 7].

III. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо модельну задачу на відшукування гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в скінченній однозв'язній криволінійній області $G_z = ABMNCD$ ($z = x + iy$), обмеженій чотирма гладкими кривими (див. рис. 1)

$$AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}, \quad BMNC = \{z: f_2(x, y) = 0\},$$

$$CD = \{z: f_3(x, y) = 0\}, \quad DA = \{z: f_4(x, y) = 0\}$$

при умовах

$$\varphi|_{AB} = \varphi_* = 0, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^* = 1, \quad \varphi|_{MN} = \varphi^\circ,$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{NC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BM} = 0,$$

де n – зовнішня нормаль до відповідної кривої [2].

Ввівши гармонічну функцію $\psi = \psi(x, y)$ (функцію течії), комплексно спряжену до функції $\varphi = \varphi(x, y)$, і замінивши останні три граничні умови на умови

$$\psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BM} = Q', \quad \psi|_{NC} = Q'',$$

де Q', Q'' – величини гідралічних потоків (невідомі параметри), цю задачу замінимо [2] більш загальною задачею на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z на

область комплексного потенціалу $G_\omega = \bigcup_{l=1}^4 G_\omega^{(l)}$,

$$G_\omega^{(1)} = \{(\varphi, \psi): \varphi_* \leq \varphi < \tilde{\varphi}, 0 < \psi < Q'\},$$

$$G_\omega^{(2)} = \{(\varphi, \psi): \tilde{\varphi} < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q'\},$$

$$G_\omega^{(3)} = \{(\varphi, \psi): \tilde{\varphi} < \varphi < \varphi^*, Q' \leq \psi < Q''\},$$

$$G_\omega^{(4)} = \{(\varphi, \psi): \varphi^\circ < \varphi < \tilde{\varphi}, Q' \leq \psi < Q''\}.$$

Тоді, відповідна обернена крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомих $\tilde{\varphi}, Q', Q''$ у диференціальній формі запишеться у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q', \\ f_2(x(\varphi, Q' - 0), y(\varphi, Q' - 0)) &= 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}, \\ f_2(x(\varphi, Q' + 0), y(\varphi, Q' + 0)) &= 0, \quad \varphi^\circ \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}, \\ f_2(x(\varphi^\circ, \psi), y(\varphi^\circ, \psi)) &= 0, \quad Q' \leq \psi \leq Q'', \\ f_2(x(\varphi, Q''), y(\varphi, Q'')) &= 0, \quad \varphi^\circ \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q'', \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) &= 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{aligned} \right.$$

Наближений розв'язок поставленої задачі отримано за допомогою розробленого програмного продукту, побудованого на основі алгоритму, який ґрунтується на почерговій параметризації величин конформних інваріантів, граничних і внутрішніх вузлів сіткової області G_z з використанням ідей методу блочної ітерації [2].

IV. ВИПАДКИ ФОРМУВАННЯ ЛІНІЙ РОЗДІЛУ ПОТОКІВ

Аналізуючи отримані у цій роботі та у [2] результати можна зробити висновок, що лінії розділу потоків за умови відсутності перетоку між ділянкою входу AB (наприклад, ділянка впадання річки у озеро) та джерелом збурення MN (наприклад, ділянка проникнення підземних вод у озеро) будуть утворюватися за подібними п'ятьма профілями у фізичній області G_z (див. рис. 1, [2]). При чому, основна точка їх розділу – точка K – буде пробігати від точки B до точки M , а значення потенціалу $\varphi|_K = \tilde{\varphi}$ знаходитиметься у межах $\varphi|_{MN} \leq \varphi|_K \leq \varphi|_{CD}$, що визначатиме ключові випадки. У цих випадках значення потенціалу φ° знаходиться в процесі розв'язання відповідної задачі при додатковій (“компенсаційній”) умові про відоме положення точки K . Також, ключовим випадком буде ситуація, коли $\varphi|_{AB} = \varphi|_{MN} = \varphi^\circ = \varphi_* = 0$. У цьому ж випадку в процесі розв'язання відповідної задачі визначається положення точки K .

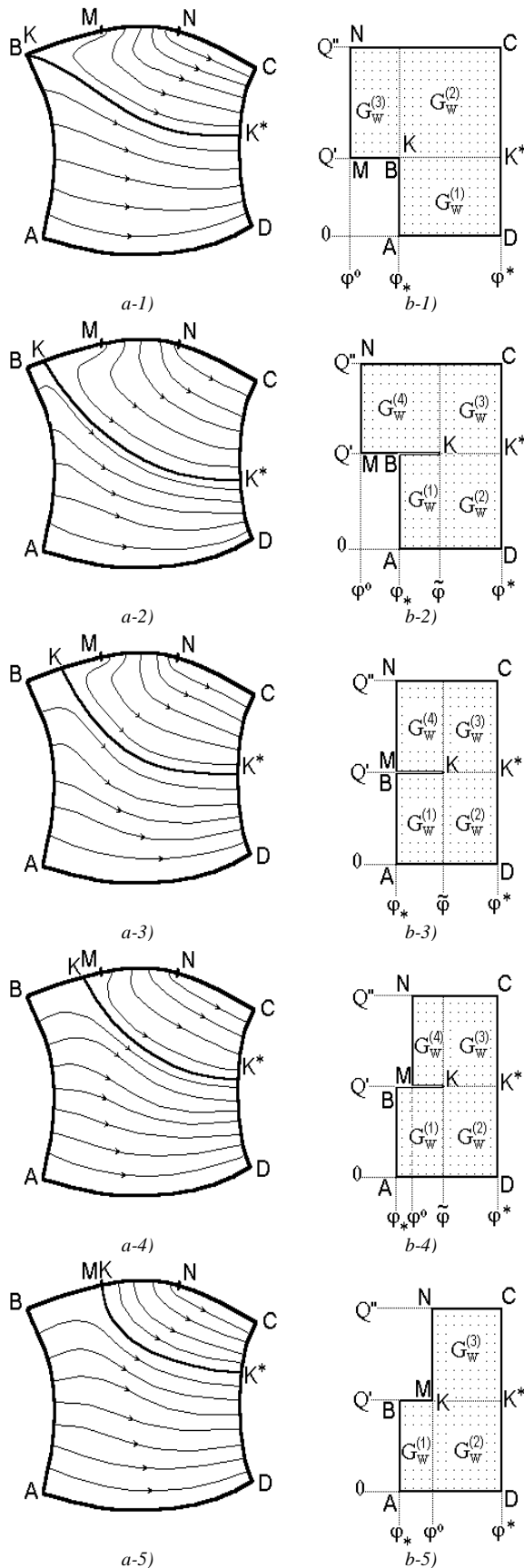


Рис. 1. Випадки формування течії у фізичній області (а) та відповідні області квазікомплексного потенціалу (б) [2]

Таким чином, в залежності від значень потенціалу (напору) φ° на додаткових еквіпотенціальних лініях (джерела збурення MN – місця проникнення підземних вод у озеро) при збільшенні їх кількості, а також зв'язності фізичної області G_z , область комплексного потенціалу $G_\omega = G_\omega(\varphi^\circ)$ будується індивідуально. У більш широкому сенсі, в залежності від значення потенціалу (напору) $-\infty < \varphi^\circ < +\infty$, можливі різні випадки формування течії у фізичній області, а отже – побудови області квазікомплексного потенціалу [2].

Запропонована методика, окрім знаходження характеристичної функції течії та квазікомплексного потенціалу, дозволяє одночасно будувати в заданій області гідродинамічну сітку руху та моделювати криві розділу потоків водних мас, розрахувати поле швидкості руху, а також розраховувати обчислювальні (ітераційні) характеристики та досліджувати і аналізувати процеси їх збіжності і стійкості.

ВИСНОВКИ

Запропоновано підхід для прогнозування динаміки поверхневих і підземних вод та розвитку числових методів комплексного аналізу для розв'язання відповідних модельних задач.

Результати проведених досліджень можуть бути використані для оцінки впливу природних та антропогенних факторів на гідрологічний режим водойми, розробки заходів щодо їх захисту від забруднення, раціонального використання водних ресурсів, збереження екосистеми водного об'єкту.

Майбутні дослідження можуть бути зосереджені на розширенні цих моделей на випадки врахування в'язкості і тертя, а також на застосування розроблених підходів для моделювання та прогнозування впливу кліматичних змін і антропогенних факторів на водні ресурси.

Також, в перспективі – застосування запропонованих підходів до прогнозування течії в північному ландшафті Волині, зокрема, в озерах Світязь та Нобель.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопечкий, "Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки," Київ: Наукова думка, 2007. 308 с.
- [2] А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак, "Методи комплексного аналізу," Рівне: НУВГП, 2013. 415 с.
- [3] А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярошак, "Моделювання фільтраційних процесів у нафтогазових пластах числовими методами квазіконформних відображень," Рівне: «Асоль», 2016. 238 с.
- [4] А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.П. Кузьменко, "Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень," Рівне: «Асоль», 2016. 283 с.
- [5] А.Я. Бомба, М.В. Бойчура, "Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації," Рівне: НУВГП, 2020. 201 с.

Modeling, control and information technologies – 2024

- [6] А.Я. Бомба, С.С. Каштан, О.О. Кушнір, "Методи комплексного аналізу моделювання глобальних процесів руху поверхневих та підземних вод," Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М.Кушніра і Ю.В.Токового, Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, 2024, Вип. 6, С. 65-66.
- [7] А.Я. Бомба., С.С. Каштан, "Системна методологія моделювання фільтраційних і гідравлічних процесів: ідентифікація кривих розділу сильно контрастних неоднорідно анізотропних середовищ методами комплексного аналізу," Моделювання, керування та інформаційні технології (МСІТ-2023): матеріали VI Міжнародної науково-практичної конференції (9-11 листопада 2023 р., м.Рівне), Рівне: НУВГП, 2023, С.112-113.