Обчислювальні технології для нелокальних початково-крайових задач гідромеханіки

https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.089

Віктор Ванін
Національний технічний університет «ХПІ»
Харків, Україна
vvaplb5256@gmail.com

Олексій Лебідь
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України
Київ, Україна
o.g.lebid@gmail.com

Дмитро Черній
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Київ, Україна
D_Cherniy@ukr.net

***Анотація* – Представлено обчислювальні технології на основі методу дискретних особливостей та їх застосування для нелокальних початково-крайових задач гідромеханіки в областях з різнотипними непроникними рухомими межами.**

***Ключові слова* – метод дискретних вихорів, метод дискретних особливостей, обчислювальні технології.**

Вступ

При постановці плоских нелокальних початково-крайових задач гідромеханіки (з відривними течіями, з проникненням скрізь межу відокремлення середовищ, з утворенням струменів та кумулятивними явищами,…), якими є задачі з рухомою вільною межею що складається з різнотипних непроникних рухомих меж - контурів $L_d(t)$, $L_v(t)$ та $L_s(t)$ в деформуємої області $D(t)$ важливо відрізняти фізичну (рис. 1) і математичну постановки задач (рис. 2).

Фізична постановка задачі

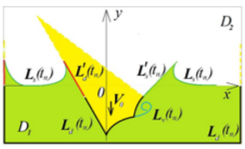

Рис. 1.

$$\varphi=\varphi(x,y,t) \qquad \vec{V}=\nabla\varphi \qquad (1)$$

$$t\ge t_0: \quad \Delta\varphi=0 \qquad \vec{r}\in D \qquad (2)$$

$$\text{на} \quad L(t)=L_d(t)+L_v(t)+L_s(t) \quad :$$

$$\vec{r}\in L_d(t): \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{L_d}=\left(\vec{W}_d,\vec{n}\right)_{L_d} \qquad (3)$$

$$\vec{r}\in L_v(t): \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^{+}_{L_v}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^{-}_{L_v} \qquad (4)$$

$$P\Big|^{+}_{L_v}=P\Big|^{-}_{L_v} \qquad (5)$$

$$\vec{r}\in L_s(t): \quad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{L_s}=\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{L_s} \qquad (6)$$

$$P_1\Big|_{L_s}=P_2\Big|_{L_s} \qquad (7)$$

$$t=0: \quad \nabla\varphi\,\big|_{t=0}=0 \qquad (8)$$

$$\varphi\,\big|_{r\to\infty}\to 0\,, \quad \nabla\varphi\,\big|_{r\to\infty}\to 0 \qquad (9)$$

$$|\nabla\varphi|<\infty \quad \text{на} \quad L(t) \qquad (10)$$

$$p_{1,2}(\vec{r},t)=p_{0,\infty}-\rho_{1,2}\left(\frac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial t}+\frac{V_{1,2}^{2}}{2}+gy\right) \qquad (11)$$

Математична постановка задачі

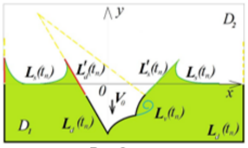

Рис. 2.

$$\varphi=\varphi(x,y,t) \qquad \vec{V}=\nabla\varphi \qquad (1')$$

$$t\ge t_0: \quad \Delta\varphi=0 \qquad \vec{r}\in D \qquad (2')$$

$$\text{на} \quad L(t)=L_d(t)+L_v(t)+L_s(t) \quad :$$

$$\vec{r}\in L_d(t): \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{L_d}=\left(\vec{W}_d,\vec{n}\right)_{L_d} \qquad (3')$$

$$\vec{r}\in L_v(t): \quad \frac{d\vec{r}_v}{dt}=\frac{1}{2}(\nabla\varphi^{+}+\nabla\varphi^{-})\,\big|_{L_v} \qquad (4')$$

$$\vec{r}_v(t_0)\in L_v(t_0) \qquad (4'')$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^{+}-\varphi^{-}\right)\Big|_{L_v}=0 \qquad (5')$$

$$\vec{r}\in L_s(t): \quad \frac{d\vec{r}_s}{dt}=\nabla\varphi_1\,\Big|_{L_s} \qquad (6')$$

$$\vec{r}_s(t_0)\in L_s(t_0) \qquad (6'')$$

$$\left.\frac{d\varphi_1}{dt}\right|_{L_s}=\left(\frac{(\nabla\varphi_1)^2}{2}-\frac{\eta}{Fr^2}\right)\Big|_{L_s} \qquad (7')$$

$$t=0: \quad \nabla\varphi\,\big|_{t=0}=0 \qquad (8')$$

$$\nabla\varphi\,\big|_{r\to\infty}\to 0, \quad \varphi\,\big|_{r\to\infty}\to 0 \qquad (9')$$

$$|\nabla\varphi|<\infty \ \text{на} \ L(t) \qquad (10')$$

Для вирішення прикладних плоских нелокальних початково-крайових задач гідромеханіки (з відривними течіями, з проникненням скрізь межу відокремлення середовищ, з утворенням струменів та кумулятивними явищами,…), якими є задачі з рухомою вільною межею що складається з різнотипних непроникних рухомих меж - контурів $L_d(t)$, $L_v(t)$ та $L_s(t)$ в деформуємої області $D(t)$ (Рис.1) використовується математична модель (с параметричної залежністю від часу t , яка в термінах ТФКЗ має інтегральні представлення:

$$\Phi(z,t)=\phi(x,y,t)+i\psi(x,y,t)=$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)}\gamma(\omega,t)\,ln(z-\omega)d\omega+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)}\gamma(\omega,t)\,ln(z-\omega)d\omega+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_s(t)}\gamma(\omega,t)\,ln(z-\omega)d\omega+C(t) \qquad (12)$$

$$\bar{V}(z,t) = u(x,y,t) - iv(x,y,t) = \frac{\partial \Phi(z,t)}{\partial z} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)} \frac{\gamma(\omega,t)}{z-\omega} d\omega \ +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)} \frac{\gamma(\omega,t)}{z-\omega} d\omega \ +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{L_s(t)} \frac{\gamma(\omega,t)}{z-\omega} d\omega \qquad (13)$$

$$\int_{L_d(t)} \gamma(\omega,t) d\omega + \int_{L_v(t)} \gamma(\omega,t) d\omega +$$
$$+ \int_{L_s(t)} \gamma(\omega,t) d\omega = \Gamma_0 = const \qquad (14)$$

Але, в силу мінливості області із заздалегідь невідомою формою частини меж, рішення задачі про нестаціонарні течії в областях з непроникними рухомими межами довільної форми можливо тільки чисельними методами, з використанням обчислювальних технологій, в яких враховано формування нових елементів меж області із визначених раніш типів.

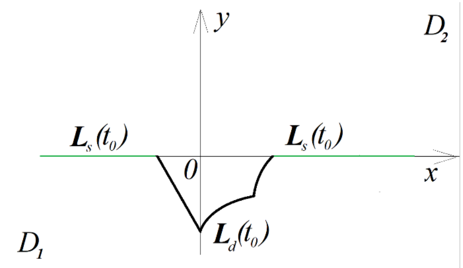

Рис. 3. Вигляд деформовного рухомого контура до породження нових елементів

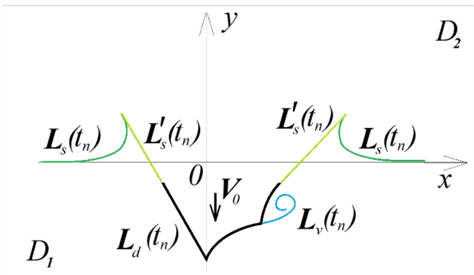

Рис. 4. Вигляд деформовного рухомого контура з породженням нових елементів.

У доповіді представлено методи побудови обчислювальних технологій на основі чисельних методів розв’язування сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь та наведено приклади розв’язання комплеску практичних задач прикладної гідромеханіки.

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

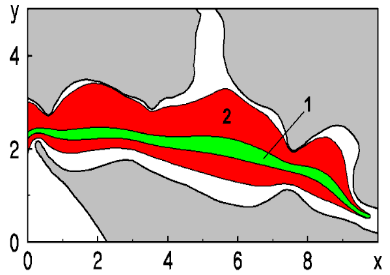

Рис. 3.
Гідрологічні та гідротехнічні задачі. Прогноз площі забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру (1) і з урахуванням вітрового навантаження (2).

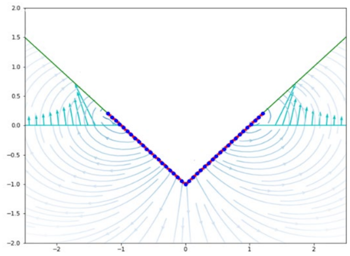

Рис.4
Розвязання задачи Вагнера

REFERENCES

[1] Cherniy D.I. Approximation of Solution of Initial-Boundary Problem with Moving Boundary.//Journal of Computational and Applied Mathematics, №2(82), 1997, pp.112-123.

[2] Cherniy D.I. Computational technologies of discrete vortices method.// Bulletin of National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», -2016.- № 6 (1178), pp.116-123.

[3] Dovgiy, S.O., Lyashko, S.I., Cherniy, D.I. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies // Cybernetics and Systems Analysis, 53 (6).-2017.- pp. 950-962.

[4] Cherniy D. I. Derivatives of Integral Expressions. //Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics №3, 2016,pp. 121-126.

[5] Довгий С.А., Лифанов И.К., Черний Д.И. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. – К.: Юстон, 2016.- 380с.

[6] Sarpkaya T.Computational Methods With Vortices - The 1988 Freeman Scholar Lecture. // Journal of Fluids Engenering, Vol.111/5, March 1989.,pp.1-60.

[7] Матвієнко В.Т., Методи оптимізації параметричних систем./ Володимир Т. Матвієнко, Володимир В. Пічкур, Дмитро І. Черній Д.І.//Журнал обчислювальної та прикладної математики.,№1 т(135) 2021, с.с.151-157.